ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 27 ΜΑΪΟΥ 2013

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολ. βιβλίο σελ 334 – 335

Α2. Σχολ. βιβλίο σελ 246

Α3. Σχολ. βιβλίο σελ 222

Α4. α) Λ

β) Σ

γ) Σ

δ) Λ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2 \Leftrightarrow (z-2)\left(\overline{z-2}\right)+|z-2|=2 \Leftrightarrow |z-2|^2+|z-2|-2=0$

Θέτουμε $a=|z-2|\geq 0$

άρα $a^2+a-2=0$

$\Delta=1^2-4\cdot 1\cdot(-2)=9$

$\alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\dfrac{-1\pm 3}{2}$ άρα α = -2 απορρίπτεται ή α = 1 δεκτή

άρα $|z-2|=1 \Leftrightarrow |z-(2+0i)|=1$

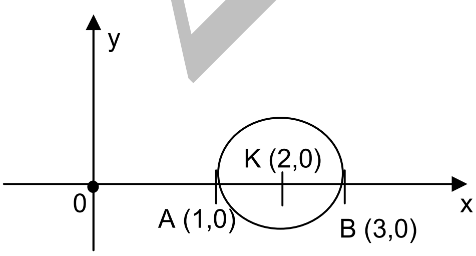
Συνεπώς ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι ο κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα ρ = 1. Η εξίσωση του είναι $(x-2)^2+y^2=1$.

<u>α΄ τρόπος:</u>

Από τριγωνική ανισότητα έχουμε: $\big||z|-|2+oi|\big|\leq |z-(2+oi)|\leq |z|+|2+oi| \Leftrightarrow \big||z|-2\big|\leq 1\leq |z|+2$

άρα $\big||z|-2\big|\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq |z|-2\leq 1 \Leftrightarrow 2-1\leq |z|\leq 1+2 \Leftrightarrow 1\leq |z|\leq 3$ άρα $|z|\leq 3$

<u>β΄ τρόπος:</u>



$\max_{|z|}=\mathrm{OK}+\mathrm{KB}=2+1=3$

$\left(\mathrm{OK}=\sqrt{(2-0)^2}=2\right)$

Β2. Έχουμε $z_1 + z_2 = -\beta$ (1)

$z_1 \cdot z_2 = \gamma$ (2) *(τύποι Vietta)*

Αν η $z_1 = x + y_i$ x, y $\in \mathbb{R}$ και επειδή z_1, z_2 συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί $z_2 = x - y_i$

Έχουμε $\left|\operatorname{Im}(z_1) - Im(z_2)\right| = 2 \Leftrightarrow \left|y - (-y)\right| = 2 \Leftrightarrow |2y| = 2 \Leftrightarrow 2|y| = 2 \Leftrightarrow |y| = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$

Έχουμε: $|z-2| = 1 \Leftrightarrow |x + yi - 2| = 1 \Leftrightarrow |(x-2) + yi| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2 = 1} \Leftrightarrow (x-2)^2 + |y|^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

άρα $z_1 = 2 + i$ και $z_2 = 2 - i$

άρα (1) $\Leftrightarrow 2 + i + 2 - i = -\beta \Leftrightarrow -\beta = 4 \Leftrightarrow \beta = -4$

(2) $\Leftrightarrow (2+i)(2-i) = \gamma \Leftrightarrow 2^2 - i^2 = \gamma \Leftrightarrow \gamma = 5$

Β3. $v^3 + a_2v^2 + a,v + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_2v^2 + a,v + a_0 = -v^3$ άρα $\left|a_2v^2 + a,v + a_0\right| = |v|^3$

Έχουμε $\left|a_2v^2 + a,v + a_2\right| \leq \left|a_2v^2\right| + |a,v| + |a_2| = |a_2| \cdot |v|^2 + |a_1| \cdot |v| + |a_2| \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3$

άρα $|v|^3 \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3 \Leftrightarrow |v|^3 - 3|v|^2 - 3|v| - 3 \leq 0$

Θεωρούμε την $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 3$ με $x \geq 0$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 3 = 3\left(x^2 - 2x - 1\right)$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) = 8$ άρα $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

x	0		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$f(0) = -3$

άρα για $0 \leq x < 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow f(x) \leq -3$

$f(4) = 64 - 48 - 12 - 3 = 1 > 0$

Αν $x \geq 4 \Rightarrow f(x) \geq f(4) \Rightarrow f(x) > 0$

$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 3 = -12 < 0$

Έχουμε f συνεχής στο [3,4] $f(3) \cdot f(4) < 0$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_o \in (3,4)$ ώστε $f(x_o) = 0$, μοναδικό στο $\left[1 + \sqrt{2}, +\infty\right]$ γιατί $f \nearrow$

αν $x < x_o < 4$ τότε $f(x) < f(x_o) = 0$ άρα $f(x) < 0$.

Για $x > x_o$ $f(x) > f(x_o) \Rightarrow f(x) > 0$

άρα $x \in (0, x_o) : f(x) < 0$

Έχουμε ότι $x_o < 4$ άρα $f(|v|) \leq 0$ όταν $0 \leq |v| \leq x_o < 4$ άρα $|v| < 4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε $\left(f(x)+x\right)\left(f'(x)+1\right)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

άρα $\left(f(x)+x\right)\left(f'(x)+(x)'\right)=x$ άρα $\left(f(x)+x\right)\left(f(x)+x\right)'=x$ άρα $2\left(f(x)+x\right)\left(f(x)+x\right)'=2x$

άρα $\left(\left(f(x)+x\right)^2\right)'=\left(x^2\right)'$ άρα $\left(f(x)+x\right)^2=x^2+c$ για $x=0$: $\left(f(0)+0\right)^2=0^2+c\Leftrightarrow 1=c$

άρα $\left(f(x)+x\right)^2=x^2+1 \quad (1)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+x$ με $x\in\mathbb{R}$. Έχουμε ότι h συνεχής στο $\mathbb{R}$ και λόγω της σχέσης (1) $h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η h διατηρεί πρόσημο. ($h^2(x)=x^2+1>0$, συνεπώς $h(x)\neq 0$)

$h(0)=f(0)+0=1>0$, άρα $h(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα $(1)\Leftrightarrow f(x)+x=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Γ2. $f'(x)=\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)'=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

Έχουμε $x^2+1>x^2\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>|x|\geq x\Leftrightarrow x-\sqrt{x^2+1}<0$

άρα $f'(x)<0$ συνεπώς f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και "1-1".

Έχουμε την εξίσωση $f\left(g(x)\right)=1\Leftrightarrow f\left(g(x)\right)=f(0)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} g(x)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g'(x)=\left(x^3+\dfrac{3x^2}{2}-1\right)'=3x^2+3x=3x(x+1)$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	ΤΜ	$\searrow$	ΤΕ	$\nearrow$	

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+\dfrac{3x^2}{2}-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+\dfrac{3x^2}{2}-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=+\infty$

$g(-1)=(-1)^3+\dfrac{3(-1)^2}{2}-1=-2+\dfrac{3}{2}=\dfrac{-4+3}{2}=-\dfrac{1}{2}$

$g(0)=-1$

άρα $g((-\infty,-1]) = \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$

$g([-1,0]) = \left[-1,-\frac{1}{2}\right]$

$g([0,+\infty)) = [-1,+\infty)$

Αν $x \in (-\infty,-1]$ έχουμε $g(x) < 0$ άρα δεν υπάρχει ρίζα της $g(x) = 0$ στο $(-\infty,-1]$,

όμοια και για $x \in [-1,0]$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ υπάρχει x_1 πολύ μεγάλο ώστε $g(x_1) > 0$

Έχουμε • g συνεχής στο $[0,x_1]$

• $g(0)\cdot g(x_1) < 0$

άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (0,x_1) \subseteq (0,+\infty)$

τέτοιο ώστε $g(x_o) = 0$, μοναδικό γιατί $g' \uparrow$ στο $[0,+\infty)$ άρα η $g(x) = 0$ έχει μόνο μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Γ3. $\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt = f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\phi x_0 \Leftrightarrow -\int_0^{x_0-\frac{\pi}{4}} f(t)dt = f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\phi x_0 \Leftrightarrow f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\phi x_0 + \int_0^{x_0-\frac{\pi}{4}} f(t)dt = 0$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\phi x + \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt$ με $x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

Έχουμε • h συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ως πράξεις –σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

• $h(0) = f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot \varepsilon\phi 0 + \int_0^{-\frac{\pi}{4}} f(t)dt = \int_0^{-\frac{\pi}{4}} f(t)dt$

$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\phi\frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}} f(t)dt = f(0)\cdot 1 = 1 > 0$

Έχουμε ότι $\sqrt{t^2+1} > |t| \geq t$ άρα $\sqrt{t^2+1} - t > 0$

άρα $f(t) > 0$ άρα $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{o} f(t)dt > 0$ (f συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$ άρα $\int_0^{-\frac{\pi}{4}} f(t)dt < 0$ άρα $h(0) < 0$

άρα $h(0)\cdot h\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$

άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0,\frac{\pi}{4}\right)$,

τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt = f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\varepsilon\phi x_0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε ότι $f'(1)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ και $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0$ άρα

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(1+5h)-f(1)}{h}-\frac{f(1-h)-f(1)}{h}\right]=0 \qquad (1)$$

Υπολογίζουμε: το $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{h}$

Θέτουμε: $u=5h$ $\quad$ $\mathrm{h}=\dfrac{\mathrm{u}}{5}$

$\lim_{h\to 0}u=\lim_{h\to 0}5h=0$ άρα $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{h}=\lim_{u\to 0}\dfrac{f(1+u)-f(1)}{\frac{u}{5}}=5\lim_{u\to 0}\dfrac{f(1+u)-f(1)}{u}=5f'(1)$

Υπολογίζουμε το: $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{h}$

Θέτουμε $v=-h$ άρα $h=-v$

$\lim_{h\to 0}=\lim_{h\to 0}(-h)=0$ άρα $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{h}=\lim_{v\to 0}\dfrac{f(1+v)-f(1)}{-v}=-\lim_{v\to 0}\dfrac{f(1+v)-f(1)}{v}=f'(1)$

άρα η (1) γίνεται: $5f'(1)+f'(1)=0$ άρα $f'(1)=0$

Αν $0<\mathrm{x}<1$ τότε $f'(x)<f'(1)\Leftrightarrow f'(x)<0$

Αν $\quad \mathrm{x}>1$ τότε $f'(x)>f'(1)\Leftrightarrow f'(x)>0$

άρα

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$, το f (1) =1

Δ2. $g'(x)=\left(\displaystyle\int_a^x\frac{f(t)-1}{t-1}dt\right)'=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$

Έχουμε $f(x)>f(1)$ για κάθε $\mathrm{x}>1$ άρα f (x) >1 άρα $f(x)-1>0$ για κάθε $\mathrm{x}>1$

Ισχύει $\mathrm{x}>1$ άρα $x-1>0$

άρα $\dfrac{f(x)-1}{x-1}>0$ για κάθε x >1

άρα $g'(x)>0$ άρα g γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}g(u)du$ με $x\in(1,+\infty)$

$$h'(x)=\left(\int_\beta^{x+1}g(u)du-\int_\beta^{x}g(u)du\right)'=g(x+1)-g(x)>0 \text{ γιατί } x+1>x \text{ και } g\nearrow \text{ στο } (1,+\infty)$$

άρα $h \nearrow$ στο $(1,+\infty)$ άρα $\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du \Leftrightarrow h\left(8x^2+5\right) > h\left(2x^4+5\right) \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$\overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} 8x^2+5 > 2x^4+5 \Leftrightarrow 2x^4-8x^2<0 \Leftrightarrow 2x^2\left(x^2-4\right)<0 \Leftrightarrow x\neq 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad x^2-4<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\neq 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad x^2<4 \Leftrightarrow x\neq 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad |x|<2 \Leftrightarrow -2<x<0$ ή $0<x<2$

Δ3. $g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$

$$g''(x)=\left(\frac{f(x)-1}{x-1}\right)'=\frac{\left(f(x)-1\right)'(x-1)-\left(f(x)-1\right)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{f'(x)(x-1)-\left(f(x)-1\right)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{(x-1)\left(f'(x)-\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)}{(x-1)^2}$$

Έχουμε • f συνεχής στο $[1,x]$
• f παραγωγίσιμη στο $(1,x)$

άρα σύμφωνα με το θεώρημα Μέσης τιμής υπάρχει $\zeta\in(1,x)$ ώστε $f'(\zeta)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

Έχουμε $1<\zeta<x$ άρα $f'(\zeta)<f'(x)$

άρα $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}<f'(x)$ άρα $f'(x)-\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}>0$

Έχουμε $x-1>0$ άρα $g''(x)>0$ για x > 1 άρα g κυρτή στο $(1,+\infty)$ άρα $g'\uparrow$ στο $(1,+\infty)$

Έχουμε την εξίσωση $(a-1)\int_a^x \dfrac{f(t)-1}{t-1}dt=\left(f(a)-1\right)(x-a)$ (2)

Προφανής ρίζα είναι το x = α.

Θεωρούμε την $\varphi(x)=(a-1)\cdot g(x)-\left(f(a)-1\right)(x-a)$ με $x>1$

$\varphi'(x)=(a-1)\cdot g'(x)-\left(f(a)-1\right)$

$\varphi'(x)=(a-1)\cdot\left(g'(x)-\dfrac{f(a)-1}{a-1}\right)$

$\varphi'(x)=(a-1)\cdot\left(g'(x)-g'(a)\right)$

αν $x>a$ τότε $g'(x)>g'(a)$, άρα $\varphi'(x)>0$

αν $x<a$ τότε $g'(x)<g'(a)$, άρα $\varphi'(x)<0$

x	1		α	
$\varphi'(x)$		–	0	+
$\varphi(x)$		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$

στο x = α η φ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $\varphi(0)=0$

για $x>a$, έχουμε $\varphi(x)>\varphi(a)$, άρα $\varphi(x)>0$

για $x<a$, έχουμε $\varphi(x)>\varphi(a)$, άρα $\varphi(x)>0$

άρα x = α, μοναδική ρίζα της $\varphi(x)=0$

Επιμέλεια: Δούνιας Δημήτρης
Μώρος Επαμεινώνδας