ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ 20 ΜΑΪΟΥ 2013

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 28

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 14

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 87

Α4. α) Λ

β) Σ

γ) Λ

δ) Λ

ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{x^2(x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-1}{x^2(x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x+1-1}{x^2(x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=\frac{1}{(-1)\cdot 2}=-\frac{1}{2}$$

Άρα έχουμε: $P(\omega_1)=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

Βρίσκουμε την $f'(x)$, έχουμε: $f'(x)=\left(\frac{x}{3}\ln x\right)'=\left(\frac{x}{3}\right)'\ln x+\frac{x}{3}(\ln x)'=\frac{1}{3}\ln x+\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\ln x+\frac{1}{3}$

Ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x όταν x = 1 είναι $f'(1)=\frac{1}{3}\ln 1+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$, άρα $P(\omega_3)=\frac{1}{3}$

Β2. • Έχουμε $A'=\{\omega_2,\omega_3\}$

Ισχύει $\{\omega_3\}\subseteq A'$ άρα έχουμε: $P(\omega_3)\le P(A')$, δηλαδή $\frac{1}{3}\le P(A')$

• Θα δείξουμε την ανισότητα $P(A') \le \frac{3}{4}$

Έστω ότι η ανισότητα που ζητείται ισχύει, δηλαδή $P(A') \le \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - P(A) \le \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) \ge \frac{1}{4}$

Όμως $\{\omega_1\} \subseteq A$ άρα έχουμε: $P(\omega_1) \le P(A)$, δηλαδή $\frac{1}{4} \le P(A)$

Β3. Επειδή: $P(A') = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - P(A) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) = 1 - \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{4}$

Όμως $P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_4) \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + P(\omega_4) \Leftrightarrow P(\omega_4) = 0$

Ισχύει $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + P(\omega_2) + 0 = 1 \Leftrightarrow P(\omega_2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(\omega_2) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$

$A - B = \{\omega_4\}, B - A = \{\omega_3\}$

Άρα $(A - B) \cup (B - A) = \{\omega_3, \omega_4\}$

Επομένως $P[(A - B) \cup (B - A)] = P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$

Έχουμε: $A' = \{\omega_2, \omega_3\}, B' = \{\omega_2, \omega_4\}$

Άρα $A' - B' = \{\omega_3\}$, επομένως έχουμε $P(A' - B') = P(\omega_3) = \frac{1}{3}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή η μικρότερη παρατήρηση είναι 50, το αριστερό άκρο της πρώτης κλάσης θα είναι 50 άρα οι κλάσεις θα είναι της μορφής: $[50, 50+c), [50+c, 50+2c), [50+2c, 50+3c), [50+3c, 50+4c)$, θεωρώντας ως c το πλάτος της κλάσης. Επειδή η κεντρική τιμή της 4ης κλάσης είναι 85, θα έχουμε:

$$\frac{(50+3c)+(50+4c)}{2} = 85 \Leftrightarrow 100 + 7c = 170 \Leftrightarrow 7c = 70 \Leftrightarrow c = 10$$

Γ2. Έχουμε ότι: $f_4 = 2f_3$, $\delta = 75$.

Ο παρακάτω πίνακας παίρνει τη μορφή:

Κλάσεις	x_i	f_i
[50, 60)	55	
[60, 70)	65	
[70, 80)	75	
[80, 90)	85	
Σύνολο		

Έχουμε ότι: $\overline{x} = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 \Leftrightarrow 74 = 55\cdot f_1 + 65\cdot f_2 + 75\cdot f_3 + 85\cdot 2 f_3 \Leftrightarrow$

$\boxed{74 = 55\cdot f_1 + 65\cdot f_2 + 245\cdot f_3}$ (1)

Στην κλάση [70, 80) πλάτους 10 έχουμε σχετική συχνότητα f_3

Στο διάστημα [70, 75) πλάτους 5 έχουμε σχετική συχνότητα x

Τα παραπάνω ποσά είναι ανάλογα, άρα: $\frac{10}{5} = \frac{f_3}{x} \Leftrightarrow x = \frac{f_3}{2}$

Μέχρι τη διάμεσο δ = 75 έχουμε 50% των παρατηρήσεων, άρα $f_1 + f_2 + \frac{f_3}{2} = 0,5 \Leftrightarrow \boxed{f_1 + f_2 = 0,5 - \frac{f_3}{2}}$ (2)

Έχουμε ότι: $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 0,5 - \frac{f_3}{2} + f_3 + 2f_3 = 1 \Leftrightarrow 3f_3 - \frac{f_3}{2} = 0,5 \Rightarrow 6f_3 - f_3 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5f_3 = 1 \Leftrightarrow f_3 = \frac{1}{5} = 0,2$

Άρα $f_4 = 2f_3 = 2\cdot 0,2 = 0,4$

$(2) \Leftrightarrow f_1 + f_2 = 0,5 - \frac{0,2}{2} \Leftrightarrow f_1 + f_2 = 0,5 - 0,1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = 0,4 \Leftrightarrow f_2 = 0,4 - f_1$

$(1) \Leftrightarrow 74 = 55f_1 + 65(0,4 - f_1) + 245\cdot 0,2 \Leftrightarrow 74 = 55f_1 + 26 - 65f_1 + 49 \Leftrightarrow 10f_1 = 1 \Leftrightarrow f_1 = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \boxed{f_1 = 0,1}$

Άρα $f_2 = 0,4 - 0,1$ άρα $\boxed{f_2 = 0,3}$

Ο πίνακας γίνεται:

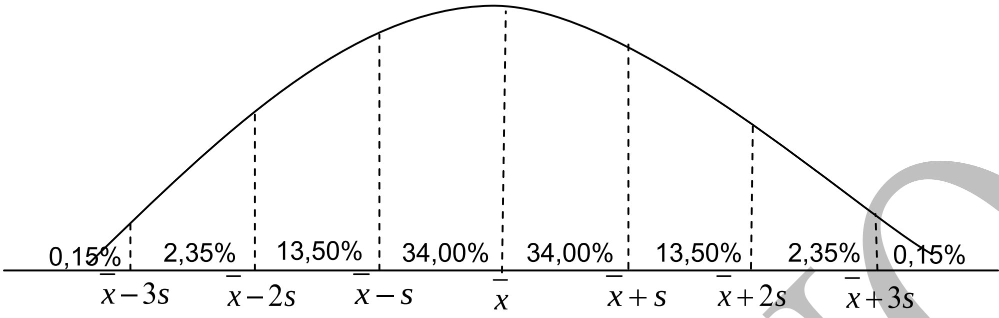
Κλάσεις	x_i	f_i
[50, 60)	55	0,1
[60, 70)	65	0,3
[70, 80)	75	0,2
[80, 90)	85	0,4
Σύνολο		1,00

Γ3. Αν v_1, v_2, v_3, v_4 οι αντίστοιχες συχνότητες και $\overline{\psi}$ η μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 80, τότε:

$$\overline{\psi} = \frac{v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3}{v_1 + v_2 + v_3} = \frac{\frac{v_1x_1}{v} + \frac{v_2x_2}{v} + \frac{v_3x_3}{v}}{\frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} + \frac{v_3}{v}} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3}{f_1 + f_2 + f_3} = \frac{0,1\cdot 55 + 0,3\cdot 65 + 0,2\cdot 75}{0,1 + 0,3 + 0,2} = \frac{5,5 + 19,5 + 15}{0,6} =$$

$$= \frac{40}{0,6} = \frac{400}{6} = \frac{200}{3}$$

Γ4.



Επειδή η κατανομή είναι κανονική θα πρέπει $\bar{x}+2s=74$, $\bar{x}-s=68$

$$\begin{matrix}(\cdot 1)\\(\cdot 2)\end{matrix}\begin{cases}\bar{x}+2s=74\\ \bar{x}-s=68\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\bar{x}+2s=74\\ 2\bar{x}-2s=136\;(+)\end{cases}$$

$$3\bar{x}=210\Leftrightarrow\bar{x}=70$$

Επομένως $\bar{x}-s=68\Leftrightarrow 70-s=68\Leftrightarrow s=2$

Έχουμε $CV=\dfrac{s}{|\bar{x}|}=\dfrac{2}{70}<\dfrac{7}{70}=\dfrac{1}{10}$

Ισχύει $CV<10\%$ άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x)=x\ln x+\kappa, x>0, \kappa\in\mathbb{Z}$ με κ >1

$f'(x)=(x)'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\dfrac{1}{x}=\ln x+1$

Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $\left(1, f\left(1\right)\right)$ είναι $y=\lambda x+\beta$ με $\lambda=f'(1)=1$, δηλαδή $y=x+\beta$

Για x = 1 έχουμε $f\left(1\right)=1\cdot\ln 1+k=k$

Άρα για x = 1 και $y=k$ έχουμε : $k=1+\beta\Leftrightarrow\beta=k-1$

Επομένως $y=x+\kappa-1$

• Σημείο τομής της (ε) με x΄x
Για y = 0 έχουμε x = 1 – κ δηλαδή $A(1-\kappa,0)$

• Σημείο τομής της (ε) με y΄y
Για x= 0 έχουμε y = k – 1 δηλαδή $B(0,\kappa-1)$

Ισχύει $E=\left(OAB\right)=\dfrac{1}{2}|\kappa-1||1-\kappa|=\dfrac{1}{2}\left(\kappa-1\right)\left(\kappa-1\right)=\dfrac{\left(\kappa-1\right)^2}{2}$

Όμως $E<2\Leftrightarrow\dfrac{\left(\kappa-1\right)^2}{2}<2\Leftrightarrow\left(\kappa-1\right)^2<4\Leftrightarrow\kappa^2 2\kappa+1<4\Leftrightarrow\kappa^2-2\kappa-3<0\Leftrightarrow\kappa\in(-1,3)$

Όμως $\kappa\in\mathbb{Z}$ με κ > 1 , άρα κ = 2

Δ2. α) Έστω y_i οι τεταγμένες των 50 σημείων της (ε) με i=1,2, …., 50

Η εφαπτομένη (ε) της Cf για κ = 2 γίνεται y = x+1

Επομένως έχουμε $y_i = x_i + 1$

Ισχύει $\overline{y} = \overline{x} + 1 \Leftrightarrow \ 31 = \overline{x} + 1 \Leftrightarrow \ \overline{x} = 30$

β) Έστω $W_1, W_2, ..., W_{50}$ οι καινούριες τετμημένες και $\overline{W} = 31$ η νέα μέση τιμή των τετμημένων

Έ χουμε: $\overline{W} = \dfrac{(W_1 + W_2 + ... + W_{20}) + (W_{21} + ... + W_{35}) + (W_{36} + ... + W_{50})}{50} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 50 \cdot 31 = (x_1 + 3) + (x_2 + 3) + ...(x_{20} + 3) + (x_{21} + ...x_{35}) + (x_{36} - \lambda) + (x_{37} - \lambda) + ... + (x_{50} - \lambda)$

$\Leftrightarrow 1550 = (x_1 + x_2 + ...x_{20}) + (x_{21} + ... + x_{35}) + (x_{36} + x_{37} + ... + x_{50}) + 60 - 15\lambda \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1550 = 50 \cdot 30 + 60 - 15\lambda \Leftrightarrow 50 = 60 - 15\lambda \Leftrightarrow 15\lambda = 10 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$

Δ3. Μελετούμε την συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln x + 2$ ως προς την μονοτονία, έχουμε: $f'(x) = \ln x + 1, x > 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = -\ln e \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-1} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x > -\ln e \Leftrightarrow \ln x > \ln\dfrac{1}{e} \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Η $f \downarrow$ στο $(0, \frac{1}{e}]$ και η $f \uparrow$ στο $[\frac{1}{e} + \infty)$

Επειδή η $f \uparrow$ στο $[\frac{1}{e} + \infty)$ και $\frac{1}{e} \langle \alpha \langle \beta \langle \gamma \langle e$ θα έχουμε: $f(\frac{1}{e}) < f(a) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$

επιπλέον βρίσκουμε:

$f'(\frac{1}{e}) = \ln\frac{1}{e} + 1 = \ln 1 - \ln e + 1 = 0$

$f(e) = e \ln e + 2 = e + 2$

$f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} + 2 = -\frac{1}{e} + 2$

Άρα $2 - \frac{1}{e} < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < e + 2$

Επομένως οι τιμές των παρατηρήσεων σε αύξουσα σειρά είναι: $0 = f'\left(\frac{1}{e}\right) < f(a) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$

Άρα $R = f(e) - f'\left(\frac{1}{e}\right) = e + 2 - 0 = e + 2$

Δίνεται ότι $\alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta} \cdot \gamma^{\gamma} = e^7$,

επομένως $\ln(\alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta} \cdot \gamma^{\gamma}) = \ln e^7 \Leftrightarrow \ln \alpha^{\alpha} + \ln \beta^{\beta} + \ln \gamma^{\gamma} = 7 \ln e \Leftrightarrow \alpha \ln \alpha + \beta \ln \beta + \gamma \ln \gamma = 7 \quad (1)$

Έστω $\bar{z}$ η μέση τιμή των παραπάνω παρατηρήσεων, έχουμε:

$$\bar{z} = \frac{f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f'(\frac{1}{e}) + f(e)}{5} = \frac{(\alpha \ln \alpha + 2) + (\beta \ln \beta + 2) + (\gamma \ln \gamma + 2) + e + 2 + 0}{5} =$$

$$= \frac{\alpha \ln \alpha + \beta \ln \beta + \gamma \ln \gamma + 6 + e + 2}{5} = \frac{7 + 6 + e + 2}{5} \overset{(1)}{=} \frac{13 + e + 2}{5}$$

Δ4. α) Επειδή $f'(x) > 0$ για $x > \frac{1}{e}$ έχουμε ότι για $x > \frac{1}{e}$ η εφαπτομένη σχηματίζει με τον x΄x οξεία γωνία, άρα $\mathrm{A} = \{t_{11}, t_{12}, ..., t_{30}\}$, άρα $\mathrm{N}(\mathrm{A}) = 20$.

Επειδή ο δειγματικός χώρος Ω, αποτελείται από ισοπίθανα, απλά ενδεχόμενα, ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας, άρα $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{N}(\mathrm{A})}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

β) Έχουμε $f(t) > f'(t) + 1 \Leftrightarrow t \cdot \ln t + 2 > \ln t + 1 + 1 \Leftrightarrow t \cdot \ln t + 2 > \ln t + 2 \Leftrightarrow$

$t \cdot \ln t > \ln t \Leftrightarrow t \cdot \ln t - \ln t > 0 \Leftrightarrow (t-1)\ln t > 0 \quad (1)$

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha\nu & t < 1 \Leftrightarrow \ln t < \ln 1 \Leftrightarrow \ln t < 0 \\ \kappa\alpha\iota & t - 1 < 0 \end{array}\right\} \text{ άρα } (t-1)\ln t > 0$$

Συνεπώς η σχέση $f(t) > f'(t) + 1$ ισχύει για κάθε $0 < t_i < 1$ με $i = 1, 2, ..., 29$

άρα $B = \{t_1, t_2, ..., t_{29}\}$

Ζητείται η πιθανότητα του ενδεχομένου $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{t_{11}, t_{12}, ..., t_{29}\}$

άρα $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{\mathrm{N}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{19}{30}$

Επιμέλεια: **Δημήτρης Δούνιας**
Επαμεινώνδας Μώρος