ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου ΟΕΔΒ σελ. 251

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου ΟΕΔΒ σελ. 273

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου ΟΕΔΒ σελ. 150

Α4. α) Λ
β) Σ
γ) Σ
δ) Σ
ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θέτουμε $z = x + yi, \quad x,y \in \mathbb{R}$, άρα έχουμε:

$$2|z|^2 + (z+\bar{z})i - 4 - 2i = 0 \quad (1) \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + 2xi - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(x^2+y^2) + 2xi - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + xi - 2 - i = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2+y^2-2) + (x-1)i = 0 + 0i \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2 = 0 \text{ και } x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

x = 1 και $1^2 + y^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow$

x = 1 και $y^2 = 1 \Leftrightarrow$

x = 1 και $y = \pm 1$

Επομένως οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι οι μιγαδικοί $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = 1 - i$

Β2. Έχουμε

$$w = 3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39} = 3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{39} = 3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{38} \cdot \left(\frac{1+i}{1-i}\right) = 3\frac{\left[(1+i)^2\right]^{19}}{\left[(1-i)^2\right]^{19}} \cdot \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} =$$

$$= 3\frac{(2i)^{19}}{(-2i)^{19}} \cdot \frac{2i}{1^2+1^2} = 3\frac{2^{19} \cdot i^{19}}{(-2)^{19} \cdot i^{19}} \cdot \frac{2i}{2} = -3\frac{2^{19}}{2^{19}} \cdot i = -3i$$

Β3. $|u + w| = |4z_1 - z_2 - i| \quad (2)$

Έχουμε

$$|4z_1 - z_2 - i| = |4(1+i) - (1-i) - i| = |4 + 4i - 1 + i - i| =$$

$$= |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

άρα $(2) \Leftrightarrow |u - 3i| = 5 \Leftrightarrow |u - (0 + 3i)| = 5$

άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών u είναι ο κύκλος με κέντρο Κ(0,3) και ακτίνα ρ=5.

Η εξίσωση του είναι $(x-0)^2 + (y-3)^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 = 25$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η h είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις – σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$h'(x)=\left[x-\ln\left(e^x+1\right)\right]'=1-\frac{1}{e^x+1}\left(e^x+1\right)'=1-\frac{e^x}{e^x+1}=$$

$$=\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R}$$

Η h΄ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$h''(x)=\left(h'(x)\right)'=\left(\frac{1}{e^x+1}\right)'=\frac{-\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}=-\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0,\quad x\in\mathbb{R}$$

Επειδή h΄΄(x)<0 για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η h είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Επειδή $e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1}$ έχουμε

$$\ln e^{h(2h'(x))}<\ln\frac{e}{e+1}\quad (y=\ln x\uparrow \text{στο}\,(0,+\infty))\Leftrightarrow$$

$$h\left(2h'(x)\right)<\ln e-\ln(e+1)\Leftrightarrow h\left(2h'(x)\right)<1-\ln(e+1)\quad (1)$$

Έχουμε: $h(1)=1-\ln(e+1)$

Επομένως (1) $\Leftrightarrow$:

$h\left(2h'(x)\right)<h(1)$ (h ↑ στο $\mathbb{R}$, γιατί h΄(x)>0 για κάθε $x\in\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$

$$2h'(x)<1\Leftrightarrow h'(x)<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{e^x+1}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2<e^x+1\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow$$

$$e^x>e^o(y=e^x\uparrow \text{στο}\ \mathbb{R})\Leftrightarrow x>0$$

Γ3. Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x-\ln\left(e^x+1\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln e-\ln\left(e^x+1\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln e^x-\ln\left(e^x+1\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)\right]\quad (2)$$

Θέτουμε $u=\frac{e^x}{e^x+1}$

Έχουμε $\lim_{x\to+\infty}u=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(e^x+1\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=$

Επομένως η (2) γίνεται: $\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{u\to1}(\ln u)=\ln1=0$

Συνεπώς η ευθεία y=0 (x΄x) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο +∞.

• Έχουμε $\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\ln\left(e^x+1\right)}{x}\quad (3)$

Θέτω $e^x+1=u$

$$\lim_{x\to-\infty}u=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x+1\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x+1\right)=1$$

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln(e^x+1)\right]=\lim\limits_{u\to1}(\ln u)=\ln 1=0$

Άρα η (3) γίνεται $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{h(x)}{x}\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left[x-\ln(e^x+1)\right]'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[1-\dfrac{1}{e^x+1}\left(e^x+1\right)'\right]=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{e^x}{e^x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\frac{1}{0+1}=1=l$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[h(x)-l\,x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x-\ln\left(e^x+1\right)-x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\ln\left(e^x+1\right)\right]=$
  $=-\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(e^x+1\right)\right]=-\lim\limits_{u\to1}\left(\ln u\right)=-\ln 1=0=b$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο -∞ είναι η y=x.

Γ4.

Έχουμε

$D_\varphi=\mathbb{R}$

$\varphi(x)=e^x\left(h(x)+\ln 2\right)=e^x\left(x-\ln\left(e^x+1\right)+\ln 2\right)=$

$e^x\left(\ln e^x-\ln\left(e^x+1\right)+\ln 2\right)=e^x\cdot\ln\dfrac{2e^x}{e^x+1}$

$\varphi(x)=0\Leftrightarrow e^x\cdot\ln\dfrac{2e^x}{e^x+1}=0\Leftrightarrow\ln\dfrac{2e^x}{e^x+1}=0\Leftrightarrow$

$\dfrac{2e^x}{e^x+1}=1\Leftrightarrow 2e^x=e^x+1\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$

$\varphi(x)>0\Leftrightarrow e^x\cdot\ln\dfrac{2e^x}{e^x+1}>0\Leftrightarrow\ln\dfrac{2e^x}{e^x+1}>0\Leftrightarrow$

$\ln\dfrac{2e^x}{e^x+1}>\ln 1\underset{\text{γν. αύξουσα}}{\overset{y=\ln x}{\Leftrightarrow}}\dfrac{2e^x}{e^x+1}>1\Leftrightarrow 2e^x>e^x+1\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow$

$x>0$

$\varphi(x)<0\Leftrightarrow e^x\ln\dfrac{2e^x}{e^x+1}<0\Leftrightarrow\ln\dfrac{2e^x}{e^x+1}<0\Leftrightarrow$

$\ln\dfrac{2e^x}{e^x+1}<\ln 1\Leftrightarrow\dfrac{2e^x}{e^x+1}<1\Leftrightarrow 2e^x<e^x+1\Leftrightarrow$

$e^x<1\Leftrightarrow x<0$

Έχουμε

x	$-\infty$		0		$+\infty$
φ(x)		−	0	+	

$$E(\Omega)\int_0^1 |\varphi(x)|\,dx=\int_0^1 \varphi(x)\,dx=\int_0^1 e^x\left[x-\ln\left(e^x+1\right)+\ln 2\right]dx=$$

$$\int_0^1 xe^x dx-\int_0^1 e^x\ln\left(e^x+1\right)dx+\int_0^1 e^x \ln 2dx \qquad (4)$$

Έχουμε:

- $I_1=\int_0^1 xe^x dx=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx=$

  $1\cdot e^1-0\cdot e^0-\left[e^x\right]_0^1=e-(e-1)=1$

- $I_2=\int_0^1 e^x\ln\left(e^x+1\right)dx$ άρα θέτω $e^x+1=u$ $\quad du=e^x dx$ Για x=0 τότε $u_1=2$, Για x=1 τότε $u_2=e+1$

Άρα

$$I_2=\int_2^{e+1}\ln u\,du=\int_2^{e+1}(u)'\,\ln u\,du=$$

$$\left[u\cdot\ln u\right]_2^{e+1}-\int_2^{e+1}1\,du=(e+1)\ln(e+1)-2\ln 2-\left[u\right]_2^{e+1}=$$

$$=(e+1)\ln(e+1)-2\ln 2-(e+1-2)=$$

$$=(e+1)\ln(e+1)-2\ln 2-e+1$$

$$I_3=\int_0^1(\ln 2)e^x dx=\ln 2\int_0^1 e^x dx=\ln 2\left[e^x\right]_0^1=(e-1)\ln 2$$

Άρα η (4) γίνεται:

$$E(\Omega)=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3=1-\left[(e+1)\ln(e+1)-2\ln 2-e+1\right]+(e-1)\ln 2$$

$$=\cancel{1}-(e+1)\ln(e+1)+2\ln 2+e-\cancel{1}+(e-1)\ln 2$$

$$=-(e+1)\ln(e+1)+2\ln 2+(e-1)\ln 2+e$$

$$=-(e+1)\ln(e+1)+\ln 2+e\ln 2+e$$

$$=-(e+1)\ln(e+1)+(e+1)\ln 2+e$$

$$=(e+1)[\ln 2-\ln(e+1)]+e$$

$$=(e+1)\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)+e$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Υπολογίζουμε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1}=e^0=1=f(0)$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$, συνεπώς η f είναι συνεχής στο x_o=0.

Αν x<0: $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)'=\dfrac{\left(e^x-1\right)'x-\left(e^x-1\right)(x)'}{x^2}=\dfrac{e^x\cdot x-\left(e^x-1\right)}{x^2}=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=xe^x-e^x+1$ με $x\le 0$

$f'(x)=\left(xe^x-e^x+1\right)'=(x)'e^x+x\left(e^x\right)'-\left(e^x\right)'+(1)'=e^x+xe^x-e^x=xe^x<0$ για x<0

άρα φ↓ στο (-∞,0]

Αν x<0 έπεται φ(x)>φ(0) άρα $xe^x-e^x+1>0$

άρα f ΄(x)>0 για κάθε x<0

άρα f γνησίως αύξουσα στο (-∞,0]

Αν x>0: $f'(x)=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}$

Θεωρούμε την $w(x)=xe^x-e^x+1$ με $x\geq 0$

$w'(x)=xe^x>0$ για κάθε x>0

άρα ω ↑ στο [0, +∞)

για x>0 έπεται ω(x)>ω(0) άρα $xe^x-e^x+1>0$

άρα f ΄(x)>0 για κάθε x>0

άρα f γνησίως αύξουσα στο [0, +∞)

Επειδή f γνησίως αύξουσα στα (-∞, 0] και [0, +∞) και συνεχής στο x_o=0 έχουμε ότι f γνησίως αύξουσα στο ¡ .

Δ2. α) Υπολογίζουμε την παράγωγο της f στο x_o=0

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{e^o}{2}=\frac{1}{2}$$

άρα $f'(0)=\dfrac{1}{2}$

Έχουμε $\int_1^{2f'(0)} f(u)du=\int_1^{2\frac{1}{2}} f(u)\,du=\int_1^1 f(u)\,du=0$ άρα προφανής ρίζα η x = 0

Επειδή f κυρτή έχουμε f΄ ↑ στο ¡ .

Έστω ότι η εξίσωση έχει και δεύτερη ρίζα την ξ

● Αν

$$x>0\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(0)\Leftrightarrow f'(x)>\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2f'(x)>1$$

Έχουμε για x>0, ότι $f(x)>0$

(διότι: $e^x>1\Leftrightarrow e^x-1>0$ και x>0)

Συνεπώς: $\int_1^{2f'(x)} f(u)du>0\Leftrightarrow 0>0,$ άτοπο

● Αν

$$x<0\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(0)\Leftrightarrow f'(x)<\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2f'(x)<1$$

έχουμε για x<0, ότι f(x)>0 (διότι: $e^x<1\Leftrightarrow e^x-1<0,\quad x<0$)

Συνεπώς:

$$\int_{2f'(x)}^{1} f(u)du>0\Leftrightarrow -\int_1^{2f'(x)} f(u)du>0$$

$$\Leftrightarrow\int_1^{2f'(x)} f(u)du<0\Leftrightarrow 0<0$$

άτοπο

Άρα $x=0$ μοναδική λύση της εξίσωσης $\int_1^{2f'(x)} f(u)du=0$

β) Έστω $M_1\left(x(t_1),y\ (t_1)\right)$ το σημείο της C_f για το οποίο ισχύει $x'(t_1)=2y\,'(t_1)>0$.

Έχουμε $y\ (t)=f\left(x(t)\right)$ άρα $y\ '(t)=\left(f\left(x(t)\right)\right)'=f'\left(x(t)\right)g x'(t)$ για $t=t_1: y\ '(t_1)=f'\left(x(t_1)\right)\cdot x'(t_1)$

άρα $y\ '(t_1)=f'\left(x(t_1)\right)\cdot 2y\ '(t_1)$

άρα $1=2f'\left(x(t_1)\right)\Leftrightarrow f'\left(x(t_1)\right)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow f'\left(x(t_1)\right)=f'(0)$ και επειδή f' γνησίως αύξουσα θα είναι και $1-1$

άρα έχουμε $x(t_1)=0$ άρα $y\ (t_1)=1$ άρα το σημείο είναι το $\mathrm{M}_1(0,1)$

Δ3. Έχουμε

$$g(x)=\left(x\cdot f(x)+1-e\right)^2(x-2)^2=\left(x\frac{e^x-1}{x}+1-e\right)^2(x-2)^2=$$

$$=\left(e^x-1+1-e\right)^2(x-2)^2=\left(e^x-e\right)^2(x-2)^2$$

$$g'(x)=\left[\left(e^x-e\right)^2(x-2)^2\right]'=\left[\left(e^x-e\right)^2\right]'(x-2)^2+\left(e^x-e\right)^2\left[(x-2)\right]'=$$

$$=2\left(e^x-e\right)e^x(x-2)^2+2\left(e^x-e\right)^2(x-2)=2\left(e^x-e\right)(x-2)\cdot\left(e^x(x-2)+e^x-e\right)=$$

$$=2\left(e^x-e\right)(x-2)\cdot\left(xe^x-2e^x+e^x-e\right)=2\left(e^x-e\right)(x-2)\cdot\left(xe^x-e^x-e\right)$$

Έχουμε

$e^x-e=0\Leftrightarrow e^x=e\Leftrightarrow x=1$

$e^x-e>0\Leftrightarrow e^x>e\Leftrightarrow x>1$

$e^x-e<0\Leftrightarrow e^x<e\Leftrightarrow x<1$

$x-2=0\Leftrightarrow x=2$

$x-2>0\Leftrightarrow x>2$

$x-2<0\Leftrightarrow x<0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $s\ (x)=xe^x-e^x-e$ με $x\in(0,+\infty)$

Έχουμε $s\ '(x)=\left(xe^x-e^x-e\right)'=e^x+xe^x-e^x=xe^x>0$

Άρα σ γνησίως αύξουσα στο (0, +∞)

Έχουμε σ συνεχής στο [1, 2]

$s\ (1)=e-e-e=-e<0$

$s\ (2)=2e^2-e^2-e=e^2-e>0$

άρα σ(1)σ(2)<0, άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x\in(1,2)$ τέτοιο ώστε σ (ξ) =0

Επειδή η σ γνησίως αύξουσα στο (0,+∞) έχουμε

για $x>x\Leftrightarrow s\ (x)>s\ (x)\Leftrightarrow s\ (x)>0$

για $0<x>x\Leftrightarrow s\ (x)<s\ (x)\Leftrightarrow s\ (x)<0$

Άρα

x	0		1		x		2		$+\infty$
$e^x - e$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$xe^x - e^x - e$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		]		Z		]		Z	
			TE		TM		T.E		

άρα η g παρουσιάζει στα $x_1=1$ και $x_2=2$ τοπικά ελάχιστα και στο $x_3=\xi$ τοπικό μέγιστο.