ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ σύγχρονο

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ 19-6-2017

ΘΕΜΑ Α

Α1. Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής σελ. 31

Α2. Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής σελ. 14

Α3. Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής σελ. 72

Α4. α) Σ

β) Λ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε τον πίνακα:

x_i	v_i
1	2
3	3
5	4
9	1

α) Έχουμε:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i}{v}=\frac{x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4}{v}=\frac{1\cdot2+3\cdot3+5\cdot4+9\cdot1}{10}=\begin{bmatrix} v=v_1+v_2+v_3+v_4= \\ 2+3+4+1=10 \end{bmatrix}=\frac{2+9+20+9}{10}=\frac{40}{10}=4$$

β) Επειδή το πλήθος είναι άρτιο (ν=10) η διάμεσος θα είναι ίση με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων. Επομένως, από το διπλανό πίνακα έχουμε:

x_i	v_i	N_i
1	2	2
3	3	5
5	4	9
9	1	10

$$\delta=\frac{5\pi\alpha\rho+6\pi\alpha\rho}{2}=\frac{3+5}{2}=4$$

γ) Συμπληρώνουμε τον αρχικό πίνακα ως εξής:

xi	**vi**	$\left(x_i-\bar{x}\right)^2$	$\left(x_i-\bar{x}\right)^2 v_i$
1 3 5 9	2 3 4 1	9 1 1 25	18 3 4 25
Σύνολο	10		50

Έχουμε: $s^2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{4}\left(x_i-\bar{x}\right)^2 v_i}{v}=\dfrac{(1-4)^2+(3-4)^2\cdot 3+(5-4)^2+(9-4)^2\cdot 1}{10}=\dfrac{50}{10}=5$

Β2. Έχουμε: $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{5}$ Άρα: $CV=\dfrac{S}{\left|\bar{x}\right|}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}=\dfrac{\sqrt{5}\cdot 25}{100}>\dfrac{10}{100}$,

άρα αφού $CV>10\%$ το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

$\left[\sqrt{5}\cdot 25>10\Leftrightarrow 5\cdot 25^2>100\Leftrightarrow 3125>100(\text{ισχύει})\right]$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Έχουμε $f(x)=x^2-x+1, x\in\mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

$f'(x)=\left(x^2-x+1\right)'=\left(x^2\right)'-(x)'+(1)'=2x-1$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-1=0\Leftrightarrow 2x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

$f'(x)>0\Leftrightarrow 2x-1>0\Leftrightarrow 2x>1\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$

$f'(x)<0\Leftrightarrow 2x-1<0\Leftrightarrow 2x<1\Leftrightarrow x<\dfrac{1}{2}$

Άρα έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f ' (x)	$-$	0	$+$
f (x)	↘	ΟΕ	↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$ και η f γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

Για $x=\dfrac{1}{2}$ η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{4}+\dfrac{4}{4}=\dfrac{3}{4}$

Γ2. Έχουμε: $f(2)=2^2-2+1=3$

Άρα ζητάμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο Α(2,3).

Έστω $\varepsilon: y=\lambda x+\beta$ η ζητούμενη εξίσωση.

Έχουμε: $\lambda=f'(2)=2\cdot 2-1=3$

Άρα $y=3x+\beta$. Επειδή το σημείο Α(2,3) είναι σημείο της $y=3x+\beta$, οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν. Επομένως:

$3=3\cdot 2+\beta \Leftrightarrow 3=6+\beta \Leftrightarrow \beta=-3$.

Συνεπώς η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y=3x-3$

Γ3. ♦ Σημεία τομής με x΄x

$y=0 \Leftrightarrow 3x-3=0 \Leftrightarrow 3x=3 \Leftrightarrow x=1$

Άρα το σημείο τομής είναι: Β(1,0)

♦ Σημείο τομής με y΄y

Για x=0 έχουμε $y=3\cdot 0-3=-3$

Άρα το σημείο τομής είναι Γ (0,-3)

Γ4. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}$$

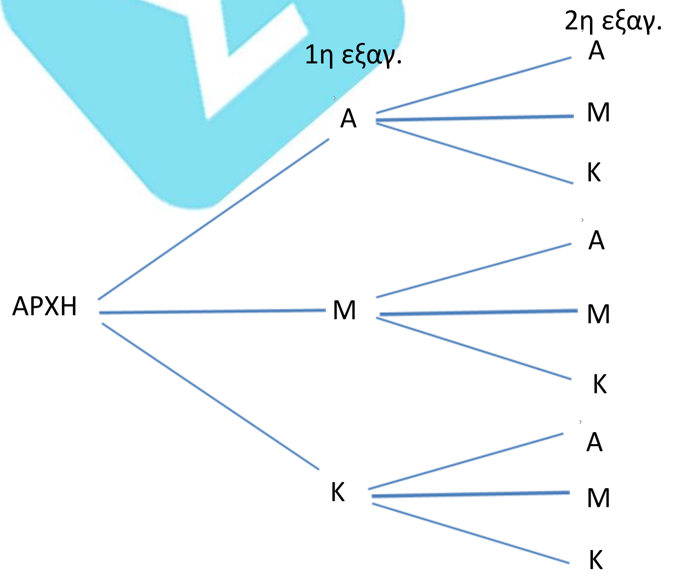
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^2-1^2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+1-1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}+1}=\frac{1}{\sqrt{1^2-1+1}+1}=\frac{1}{2}$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος περιγράφεται από το παρακάτω δενδροδιάγραμμα:



Έχουμε: Ω={ ΑΑ, ΑΜ, ΑΚ, ΜΑ, ΜΜ, ΜΚ, ΚΑ, ΚΜ, ΚΚ}

Δ2. Δίνεται Α: «η δεύτερη μπάλα που θα εξαχθεί να είναι μαύρη»
Έχουμε: $A = \{AM, MM, KM\}$
Δίνεται Β: «να εξαχθούν δυο μπάλες διαφορετικού χ χρώματος»
Έχουμε: $B = \{AM, AK, MA, MK, KA, KM\}$

Δ3 α) Έχουμε: $A' = \{AA, AK, MA, MK, KA, KK\}$
Άρα αφού ο δειγματικός χώρος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα έχουμε:
$$P(A') = \frac{N(A')}{N(\Omega)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$
Έχουμε: $A \cap B = \{AM, KM\}$, άρα
$$P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{9}$$
Έχουμε: $A - B = \{MM\}$, άρα
$$P(A - B) = \frac{1}{9}$$
Έχουμε: Β – Α= { ΑΚ, ΜΑ, ΜΚ, ΚΑ}, άρα
$$P(B - A) = \frac{N(B-A)}{N(\Omega)} = \frac{4}{9}$$

β) Έχουμε $A = \{AM, MM, KM\}$
$B = \{AM, AK, MA, MK, KA, KM\}$
Έχουμε $A \cup B = \{AM, MM, KM, AK, MA, MK, KA\}$
Έχουμε $\Omega - (A \cup B) = \{AA, KK\}$
i) Αν $\Gamma = \varnothing$ τότε $N(\Gamma) = 0$ άρα $P(\Gamma) = 0$
ii)Αν $\Gamma\{AA\}$ τότε $N(\Gamma) = 1$ άρα $P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{1}{9}$
iii) Αν $\Gamma = \{KK\}$ τότε Ν (Γ) = 1 άρα $P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{1}{9}$
iv) Αν $\Gamma = \{AA, KK\}$ τότε Ν (Γ) = 2 άρα $P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{2}{9}$
άρα η μεγαλύτερη τιμή του Ρ (Γ) είναι το $\frac{2}{9}$

Επιμέλεια: Ε. Μώρος, Δ. Δούνιας