ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ 23 ΜΑΪΟΥ 2012

ΘΕΜΑ Α

Α1. Ο.Α.Ε.Δ. Σελ. 31

Α2. Ο.Α.Ε.Δ. Σελ. 148

Α3. Ο.Α.Ε.Δ. Σελ. 96

Α4. α) Λ

β) Σ

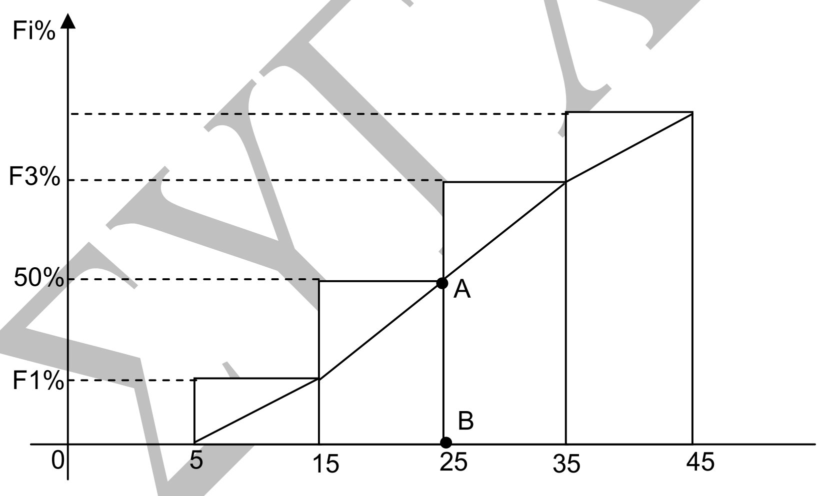
γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.



Από το 50 % του κατακόρυφου άξονα φέρνουμε παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα που τέμνει το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων στο Α. Από το Α φέρνουμε κάθετη στον οριζόντιο άξονα, η οποία τον τέμνει στο σημείο Β. Άρα $\delta = 25$.

Β2.

Χρόνος Λεπτά	X_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
$[5,15)$	10	12	20	12	20
$[15,25)$	20	18	30	30	50
$[25,35)$	30	24	40	54	90
$[35,45)$	40	6	10	60	100
Σύνολο		60	100		

Οι δύο πρώτες κλάσεις συγκεντρώνουν το 50% των παρατηρήσεων και οι δύο τελευταίες το άλλο 50% των παρατηρήσεων. Άρα $v_1+v_2=v_3+v_4 \Leftrightarrow$

$a+4+3a-6=2a+8+a-2 \Leftrightarrow$

$a+3a-2a-a=-4+6+8-2 \Leftrightarrow$

$a=8$

άρα

$v_1=a+4=8+4=12$

$v_2=3a-6=3\cdot 8-6=18$

$v_3=2a+8=2\cdot 8+8=24$

$v_4=a-2=8-2=6$

$v=v_1+v_2+v_3+v_4=12+18+24+6=60$

$f_1=\frac{v_1}{v}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}=\frac{20}{100}$ άρα $f_1\%=20\%$

$f_2=\frac{v_2}{v}=\frac{18}{60}=\frac{3}{10}=\frac{30}{100}$ άρα $f_2\%=30\%$

$f_3=\frac{v_3}{v}=\frac{24}{60}=\frac{40}{10}=\frac{40}{100}$ άρα $f_3\%=40\%$

$f_4=\frac{v_4}{v}=\frac{6}{60}=\frac{1}{10}=\frac{10}{100}$ άρα $f_4\%=10\%$

$N_1=v_1=12$

$N_2=v_1+v_2=12+18=30$

$N_3=v_1+v_2+v_3=12+18+24=54$

$N_4=v_1+v_2+v_3+v_4=v=60$

$F_1=f_1=\frac{20}{100}$ άρα $F_1\%=20\%$

$F_2=f_1+f_2=\frac{20}{100}+\frac{30}{100}=\frac{50}{100}$ άρα $f_2\%=50\%$

$F_3=f_1+f_2+f_3=\frac{20}{100}+\frac{30}{100}+\frac{400}{100}=\frac{90}{100}$ άρα $f_3\%=90\%$

$F_4=f_1+f_2+f_3+f_4=1$ άρα $F_4\%=100\%$

Β3. $\overline{x} = \dfrac{v_1x_1 + v_2 \cdot x_2 + v_3x_3 + v_4x_4}{v} = \dfrac{12\cdot 10 + 18\cdot 20 + 24\cdot 30 + 6\cdot 40}{60} = \dfrac{120+360+720+240}{60} = \dfrac{1440}{60} = 24$

$$S^2 = \frac{v_1(x_1-\overline{x})^2 + v_2(x_2-\overline{x})^2 + v_3(x_3-\overline{x})^2 + v_4(x_4-\overline{x})^2}{60} =$$

$$= \frac{12\cdot(10-24)^2 + 18(20-24)^2 + 24(30-24)^2 + 6(40-24)^2}{60} = \frac{12\cdot 14^2 + 18\cdot 4^2 + 24\cdot 6^2 + 6\cdot 16^2}{60} =$$

$$= \frac{2352+288+864+1536}{60} = \frac{5040}{60} = 84 \text{ άρα } S = \sqrt{84} \simeq 9{,}14$$

Β4. Στην κλάση $[35,45)$ πλάτος 10 έχουμε 10% των μαθητών.

Στο διάστημα $[37,45)$ πλάτος 8 έχουμε χ % των μαθητών.

Τα παραπάνω ποσά είναι ανάλογα, άρα $\dfrac{10}{8} = \dfrac{10}{x} \Leftrightarrow 10x = 8\cdot 10 \Leftrightarrow x = 8$

άρα το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά είναι 8%.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Ορίζω τα ενδεχόμενα: Γ: Ο μαθητής να μαθαίνει Γαλλικά

Ι: Ο μαθητής να μαθαίνει Ισπανικά

Τότε $P(\Gamma) = \dfrac{3v}{v^2+1}$

$P(I) = \dfrac{v+2}{v^2+1}$

$P(\Gamma \cap \mathrm{I}) = \dfrac{v+1}{v^2+1}$

$$P\left(\Gamma \cup \mathrm{I}\right) = \lim_{x\to -1} \frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x}$$

Γ1. Το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μία τουλάχιστον ξένη γλώσσα είναι $(\Gamma \cup \mathrm{I})$.

Αρκεί να δείξω ότι $P(\Gamma \cup \mathrm{I}) = 1$

$$P(\Gamma \cup \mathrm{I}) = \lim_{x\to -1} \frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x} = \lim_{x\to -1} \frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{2\left(x^2+3-4\right)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{2\left(x^2-1\right)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{2(x-1)\left(\cancel{x+1}\right)}{x(\cancel{x+1})\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{2(x-1)}{x\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \frac{2(-1-1)}{-1\left(\sqrt{1+3}+2\right)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Άρα $(\Gamma \cup \mathrm{I})$ βέβαιο ενδεχόμενο.

Γ2. Ισχύει ότι: $P(\Gamma\cup\mathrm{I})=P(\Gamma)+P(I)-P(\Gamma\cap\mathrm{I})\Leftrightarrow 1=\frac{3v}{v^2+1}+\frac{v+2}{v^2+1}-\frac{v+1}{v^2+1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1=\frac{3v+v+2-v-1}{v^2+1}\Leftrightarrow 1=\frac{3v+1}{v^2+1}\Leftrightarrow v^2+1=3v+1\Leftrightarrow v^2-3v=0\Leftrightarrow v(v-3)=0$

$\Leftrightarrow v=0$ απορρίπτεται ή $v=3$

Άρα $\boxed{v=3}$

Γ3. Το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μία από τις δύο γλώσσες είναι $(\Gamma-\mathrm{I})\cup(\mathrm{I}-\Gamma)$

Τα ενδεχόμενα $\Gamma-\mathrm{I}$, $\mathrm{I}-\Gamma$ είναι ασυμβίβαστα, οπότε ισχύει:

$P[(\Gamma-\mathrm{I})\cup(\mathrm{I}-\Gamma)]=P(\Gamma-\mathrm{I})+P(I-\Gamma)=\mathrm{P}(\Gamma)-\mathrm{P}(\Gamma\cap\mathrm{I})+\mathrm{P}(\mathrm{I})-\mathrm{P}(\mathrm{I}\cap\Gamma)=\mathrm{P}(\Gamma)+\mathrm{P}(\mathrm{I})-2\mathrm{P}(\Gamma\cap\mathrm{I})$ (1)

όμως για $v=3$ έχω $\mathrm{P}(\Gamma)=\frac{3\cdot 3}{3^2+1}=\frac{9}{10}$

$\mathrm{P}(\mathrm{I})=\frac{3+2}{3^2+1}=\frac{5}{10}$

$\mathrm{P}(\mathrm{I}\cap\Gamma)=\frac{3+1}{3^2+1}=\frac{4}{10}$

Άρα η (1) γίνεται: $P[(\Gamma-\mathrm{I})\cup(\mathrm{I}-\Gamma)]=\frac{9}{10}+\frac{5}{10}-2\cdot\frac{4}{10}=\frac{3}{5}$

Γ4. Ισχύει η σχέση: $P(\Gamma\cap\mathrm{I})=\frac{\mathrm{N}(\Gamma\cap\mathrm{I})}{\mathrm{N}(\Omega)}\Leftrightarrow\frac{2}{5}=\frac{32}{\mathrm{N}(\Omega)}\Leftrightarrow 2\mathrm{N}(\Omega)=32\cdot 5\Leftrightarrow\mathrm{N}(\Omega)=\frac{32\cdot 5}{2}\Leftrightarrow\mathrm{N}(\Omega)=80$

Άρα οι μαθητές της τάξης είναι 80.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. $f'(x)=\left(\frac{1+\ln^2 x}{x}\right)'=\frac{(1+\ln^2 x)'\cdot x-(1+\ln^2 x)(x)'}{x^2}=\frac{2(\ln x)\frac{1}{x}\cdot x-(1+\ln^2 x)}{x^2}=\frac{2\ln x-1-\ln^2 x}{x^2}=$

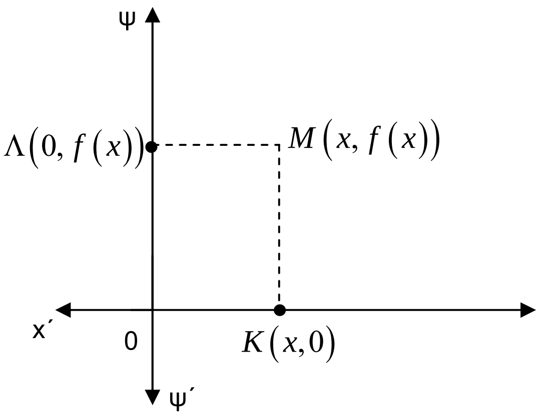
$=\frac{-(\ln^2 x-2\ln x+1)}{x^2}=\frac{-(\ln x-1)^2}{x^2}\le 0$

Έχω $f'(x)=0\Leftrightarrow(\ln x-1)^2=0\Leftrightarrow\ln x-1=0\Leftrightarrow\ln x=1\Leftrightarrow x=e$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$	

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

Δ2.



$(\text{ΟΚΜΛ}) = (\text{ΟΚ})\cdot(\text{ΟΛ}) = x\cdot f(x) = x\cdot\dfrac{1+\ln^2 x}{x} = 1+\ln^2 x$ γιατί $x>0$ και $f(x)>0$

Θεωρώ την $g(x)=1+\ln^2 x$ με $x>0$

$$g'(x)=\left(1+\ln^2 x\right)' = 2(\ln x)\frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x}{x}=0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x=1$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x}{x}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x>0 \Leftrightarrow x>1$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	Ο.Ε.	↗	

Το g (x) άρα και το εμβαδόν του ΟΚΜΛ γίνεται ελάχιστο όταν x = 1.

Άρα (ΟΚ) = 1 και $(\text{ΟΛ}) = \dfrac{1+\ln^2 1}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$ άρα (ΟΚ) = (ΟΛ) δηλαδή ΟΚΜΛ τετράγωνο.

Δ3. Έχουμε: $\lambda = f'(1) = \dfrac{-(\ln 1 - 1)^2}{1^2} = -1$ άρα $\varepsilon: y=-1x+\beta$ δηλαδή $\varepsilon: y=-x+\beta$

Έχουμε ότι: $y_i = -x_i + \beta$ για i = 1, … , 10

Έχουμε: $\overline{y} = -\overline{x}+\beta$, $s_y = |-1|\cdot s_x = s_x$

Έχουμε: $CV_y = \dfrac{s_y}{|\overline{y}|} = \dfrac{s_x}{|-\overline{x}+\beta|} = \dfrac{2}{|-10+\beta|}$

Θέλουμε το δείγμα των y_i να είναι ομοιογενές, άρα $CV_y \le \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow \dfrac{2}{|\beta-10|} \le \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow |\beta-10| \ge 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\beta-10 \le -20$ ή $\beta - 10 \ge 20) \Leftrightarrow \beta \le -10$ ή $\beta \ge 30$

Δ4. Έχω $A \subseteq A \cup B$ άρα $P(A) \leq P(A \cup B)$ άρα $f(P(A)) \geq f(P(A \cup B))$

$A \cap B \subseteq A \cup B$ άρα $P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$ άρα $f(P(A \cap B)) \geq f(P(A \cup B))$

άρα $f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$

Επιμέλεια: **Δημήτριος Δούνιας**
Επαμεινώνδας Μώρος
Κώστας Μαργαρίτης