ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

28 ΜΑΪΟΥ 2012

ΘΕΜΑ Α

Α1. Ο.Ε.Δ.Β. σελ. 253

Α2. Ο.Ε.Δ.Β. σελ. 191

Α3. Ο.Ε.Δ.Β. σελ. 258

Α4. **α)** Σ

β) Σ

γ) Λ

δ) Λ

ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Ισχύει $|z-1|^2+|z+1|^2=4 \quad (1)$

Έχουμε από την (1):

$(z-1)(\overline{z}-1)+(z+1)(\overline{z}+1)=4 \Leftrightarrow z\overline{z}-\cancel{z}-\cancel{\overline{z}}+1+z\overline{z}+\cancel{z}+\cancel{\overline{z}}+1=4 \Leftrightarrow 2z\overline{z}+2=4 \Leftrightarrow 2z\overline{z}=2 \Leftrightarrow$

$z\overline{z}=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1 \Leftrightarrow |z-(0+0i|=1$, άρα ο γ. τόπος των εικόνων του z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο το σημείο Ο(ο,ο) κ' ακτίνα ρ = 1. Η εξίσωση του είναι $x^2+y^2=1$

Β2. Επειδή z_1, z_2 είναι δυο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z θα ισχύει $|z_1|=1,\quad |z_2|=1$

άρα $|z_1|^2=1$ και $|z_2|^2=1$.

Έχουμε: $|z_1-z_2|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=2 \Leftrightarrow (z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)=2 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_1-z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2=2 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow |z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1)=2 \Leftrightarrow \cancel{2}-(z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1)=\cancel{2} \Leftrightarrow z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1=0$

$|z_1+\overline{z}_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)=z_1\overline{z}_1+z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2=|z_1|^2+z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1+|z_2|^2=2+0=2$

αφού δείξαμε προηγουμένως ότι $z_1\overline{z}_2+\overline{z}_2z_1=0$

Άρα $|z_1+z_2|^2=2 \Leftrightarrow |z_1+z_2|=\sqrt{2}$

Β3. Ισχύει $|w-5\overline{w}|=12$ (2)

Έστω $w=x+yi$ οπότε από την (2)

Έχουμε: $|x+yi-5(x-yi)|=12 \Leftrightarrow |x+yi-s_x+5yi|=12 \Leftrightarrow |-4x+6yi|=12 \Leftrightarrow \sqrt{(-4x)^2+(6y)^2=12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{16x^2+36y^2}=12 \Leftrightarrow 16x^2+36y^2=144$

(Διαιρούμε με 144) $\Leftrightarrow \dfrac{16x^2}{144}+\dfrac{36y^2}{144}=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ η όποια είναι η εξίσωση έλλειψης

Η παραπάνω έλλειψη γράφεται:

$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ άρα έχει τις εστίες της στο άξονα $x'x$ με μήκος μεγάλου άξονα $2a=2\cdot 3=6$ και μήκος μικρού άξονα $2\beta=2\cdot 2=4$ όπου α = 3 ή β = 2

Επομένως $(\text{OA})=|w|\max=\alpha=3$ και $(\text{OB})=|\text{w}|\min=\beta=2$ γιατί $|w|=|w-(o+oi)|=(\text{OM})$

Όπου Μ η εικόνα του w.

Β4. **__α΄ τρόπος:__**

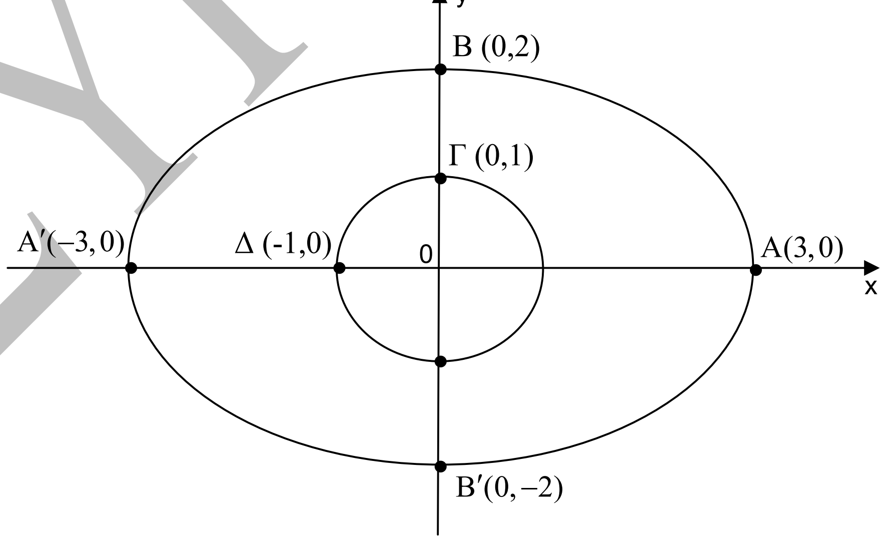
Ο γ. τόπος την εικόνα του Ζ είναι ο μοναδικός κύκλος $x^2+y^2=1$ και ο γ. τόπος των εικόνων του w και η έλλειψη με εξίσωση: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

Σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα έχουμε:

$|z-w|\max=\text{ΑΔ}=\text{ΟΑ}+\text{ΟΔ}=3+1=4$

$|z-w|\min=\text{ΒΓ}=\text{ΟΒ}-\text{ΟΓ}=2-1=1$

Άρα $1\le|z-w|\le 4$.



β΄ τρόπος:

Από τριγωνική ανισότητα έχουμε: $||z|-|w|| \le |z-w| \le |z|+|w| \Leftrightarrow |1-|w|| \le |z-w| \le 1+|w| \quad (1)$

Επειδή $2 \le |w| \le 3 \Leftrightarrow 2-1 \le |w|-1 \le 3-1 \Leftrightarrow 1 \le |w|-1 \le 2 \quad (2)$ άρα $|1-|w|| = |w|-1$

Επειδή $2 \le |w| \le 3 \Leftrightarrow 2+1 \le 1+|w| \le 3+1 \Leftrightarrow 3 \le 1+|w| \le 4 \quad (3)$

Από τις (1), (2), (3) έχουμε: $1 \le |z-w| \le 4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει $f(x) = \ln x - 1 \quad , \quad x > 0$

Παραγωγίζοντας έχουμε: $f'(x) = (x-1)'\ln x + (x-1)(\ln x)' = \ln x + \dfrac{x-1}{x} \quad , \quad x > 0$

Βρίσκουμε την $f''(x)$, άρα έχουμε: $f''(x) = (\ln x)' + \left(\dfrac{x-1}{x}\right)' = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x-(x-1)}{x^2} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 0$.

Άρα η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Για $x = 1 \quad f'(1) = \ln 1 + \dfrac{1-1}{1} = 0$

Για $0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (0,1]$.

Για $x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [1,+\infty)$.

Έχουμε τον ακόλουθο πίνακα

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

• $\Delta_1 = (0,1]$

$f(\Delta_1) = f((0,1]) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right) = [-1,+\infty)$ διότι: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x-1)\ln x - 1\right] = (-1)(-\infty) - 1 = +\infty$

• $\Delta_2 = [1,+\infty)$

$f(\Delta_2) = f([1,+\infty)) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right) = [-1,+\infty)$ διότι: $f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[(x-1)\ln x - 1\right] = (+\infty)\cdot(+\infty) - 1 = (+\infty)$

Επομένως $f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [-1,+\infty)$

Γ2. $x^{x-1}=e^{2013} \Leftrightarrow \ln(x^{x-1})=\ln e^{2013}$

$(x-1)\ln x=2013 \Leftrightarrow (x-1)\cdot\ln x-1=2012 \Leftrightarrow f(x)=2012$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ υπάρχει ξ_1 κοντά στο 0 τέτοιο ώστε $f(\xi_1)>0$ πάρα πολύ μεγάλο.

Έχουμε:

- f συνεχής στο $[\xi_1,1]$
- $-1<2012<f(\xi_1)$, δηλαδή $f(1)<2012<f(\xi_1)$

άρα από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει τουλάχιστον ένα $X_1\in(\xi_1,1)\subseteq(0,1)$,

τέτοιο ώστε $f(x_1)=2012$ μοναδικό, γιατί $f\downarrow$ στο $(0,1]$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ υπάρχει ξ_2 πάρα πολύ μεγάλο ώστε $f(\xi_2)>0$ πάρα πολύ μεγάλο.

Έχουμε:

- f συνεχής στο $[1,\xi_2]$
- $-1<2012<f(\xi_2)$, δηλάδη $f(1)<2012<f(\xi_2)$

άρα από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2\in(1,\xi_2)\subseteq(1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=2012$ μοναδικό, γιατί $f\uparrow$ στο $[1,+\infty)$.

Άρα η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Γ3. Ανάλυση της σχέσης: $f'(x_o)+f(x_o)=2012 \Leftrightarrow e^{x_o}f'(x_o)+e^{x_o}f(x_o)=2012e^{x_o} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{x_o}f'(x_o)+\left(e^{x_o}\right)'f(x_o)=2012e^{x_o} \Leftrightarrow \left(e^{x_o}f(x_o)\right)'=\left(2012e^{x_o}\right)' \Leftrightarrow \left(e^{x_o}f(x_o)-2012e^{x_o}\right)'=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^x f(x)-2012e^x$ με $x\in[x_1,x_2]$.

Έχουμε:
- h συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- h παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
- $h(x_1)=e^{x_1}f(x_1)-2012\cdot e^{x_1}=e^{x_1}\cdot 2012-2012\cdot e^{x_1}=0$

  $h(x_2)=e^{x_2}f(x_2)-2012\cdot e^{x_2}=e^{x_2}\cdot 2012-2012\cdot e^{x_2}=0$

Άρα $h(x_1)=h(x_2)=0$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε

$h'(x_o)=0 \Leftrightarrow e^{x_o}f'(x_o)+e^{x_o}f(x_o)-2012e^{x_o}=0 \Leftrightarrow f'(x_o)+f(x_o)=e^{x_o}$

Γ4. Έχουμε $g(x)=f(x)+1\ ,\ x>0$

Βρίσκουμε τα σημεία τομής της g με τον $x'x$, λύνοντας την εξίσωση:

$g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)+1=0 \Leftrightarrow (x-1)\ln x-1+1=0 \Leftrightarrow (\ln x)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=1$

Έχουμε $g'(x)=f'(x)$ άρα

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$	

Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x = 1 το $g(1)=0$

Άρα $g(x)\geq 0$ για $x\geq 1$.

Επομένως έχουμε: $E(\Omega)\int_1^e g(x)\,dx=\int_1^e x\ln x\,dx-\int_1^e \ln x\,dx=\int_1^e \ln x\left(\frac{x^2}{2}\right)'dx-\int_1^e (x)'\ln x\,dx=$

$=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx-\left(\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e 1dx\right)=\frac{e^2}{2}\ln e-0-\frac{1}{2}\int_1^e xdx-\left(e\ln e-0-\left[x\right]_1^e\right)=$

$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e-e+e-1=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-1=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}=\frac{e^2-3}{4}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε f συνεχής στο $(0,+\infty)$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε x > 0, άρα η f διατηρεί πρόσημο.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_1^{x^2-x+1} f(t)\,dt+\frac{x^2-x}{e}$ με x > 0

Έχουμε $g(1)=0$ και $g(x)\geq 0$ για κάθε x > 0 άρα $g(x)\geq g(1)$ για κάθε x > 0 άρα $g(1)$ ολικό ελάχιστο της g στο $(0,+\infty)$

Επειδή g παραγωγίσιμη (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων), σύμφωνα με το θεώρημα Fermat $g'(1)=0$

$g'(x)=\left(\int_1^{x^2-x+1} f(t)\,dt+\frac{x^2-x}{e}\right)'=f\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(x^2-x+1\right)'+\frac{2x-1}{e}=(2x-1)f\left(x^2-x+1\right)+\frac{2x-1}{e}$

άρα $g'(1)=f(1)+\frac{1}{e}\Leftrightarrow f(1)+\frac{1}{e}=0\Leftrightarrow f(1)=-\frac{1}{e}<0$

άρα $f(x)<0$, άρα $|f(x)|=-f(x)$

Έχουμε τη σχέση: $\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)\left|f(x)\right| \Leftrightarrow \ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)\cdot f(x) \quad (1)$

Θεωρούμε την $h(x) = \ln x - x$ με x > 0

$h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

άρα

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	‖	+	0	−	
$h(x)$	‖	↗	Ο.Μ.	↘	

Η h παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x = 1 το $h(1) = \ln 1 - 1 = -1$

Επειδή $h(x) \leq h(1) = -1 < 0$ για κάθε x > 0 άρα λόγω της (1) $\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)\cdot f(x) \neq 0$

άρα και $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e \neq 0$ άρα $(1) \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{\ln x - x}{\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e}$

Έχουμε ότι f παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$(1) \Leftrightarrow \frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e$ παραγωγίζουμε: $\left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)'$

άρα $\left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' - \frac{\ln x - x}{f(x)} = 0$ άρα $e^{-x}\left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' - e^{-x}\left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right) = 0$ άρα $e^{-x}\cdot\frac{\ln x - x}{f(x)} = c$ για x = 1

έχουμε $e^{-1}\frac{\ln 1 - 1}{f(1)} = c \Leftrightarrow c = \left(+\frac{1}{e}\right)\frac{-1}{-\frac{1}{e}} \Leftrightarrow c = +1$ άρα $\left(e^{-x}\right)\frac{\ln x - x}{f(x)} = +1 \Leftrightarrow f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$ με x > 0

Δ2. Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[e^{-x}(\ln x - x)\right] = -\infty$

Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{f(x)}$

Θέτουμε $u = f(x)$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} u = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{f(x)} = \lim\limits_{u\to\infty}\frac{1}{u} = 0$

Στο αρχικό όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(f(x)\right)^2 \eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right] = *$

Θέτουμε $y=\dfrac{1}{f(x)}$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} y = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)} = 0$

$$* = \lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{y^2}\eta\mu y - \frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu y - y}{y^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{y\to 0}\frac{(\eta\mu y - y)'}{(y^2)'} = \lim_{y\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu y - 1}{2y} = \frac{1}{2}\lim\frac{\sigma\upsilon\nu y - 1}{y} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

Δ3. $F(x)=\int_a^x f(t)dt \quad ,x>0$

$$F'(x)=\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$$

$$F''(x)=f'(x)=\left(e^{-x}(\ln x - x)\right)' = \left(e^{-x}\right)'(\ln x - x)+e^{-x}(\ln x - x)' = -e^{-x}(\ln x - x)+e^{-x}\left(\frac{1}{x}-1\right)=$$

$$=-e^{-x}\left(\ln x - x - \frac{1}{x}+1\right) = -e^{-x}\left[(\ln x - x + 1)-\frac{1}{x}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Έχουμε } \ln x \le x-1 \Leftrightarrow \ln x - x + 1 \le 0 \\ \quad x>0 \text{ άρα } -\dfrac{1}{x}<0\end{array}\right\} \text{ άρα } (\ln x - x + 1)-\frac{1}{x}<0$$

άρα $F''(x)>0$ για x > 0 άρα F κυρτή στο $(0,+\infty)$

Έχουμε: • F συνεχής στα $[x,2x]$, $[2x,3x]$

• F παραγωγίσιμη στα $(x,2x)$, $(2x,3x)$

άρα σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχουν $\xi_1\in(x,2x)$ και $\xi_2\in(2x,3x)$, ώστε

$$F'(\xi_1)=\frac{F(2x)-F(x)}{2x-x} \text{ άρα } F'(\xi_1)=\frac{F(2x)-F(x)}{x} \text{ και } F'(\xi_2)=\frac{F(3x)-F(2x)}{3x-2x}=\frac{F(3x)-F(2x)}{x}$$

Έχουμε $\xi_1<\xi_2$ και επειδή F κυρτή, άρα F΄ γνησίως αύξουσα έπεται $F'(\xi_1)<F'(\xi_2)$

$$\text{άρα } \frac{F(2x)-F(x)}{x}<\frac{F(3x)-F(2x)}{x}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}F(2x)-F(x)<F(3x)-F(2x)\Leftrightarrow 2F(x)<F(3x)+F(x)$$

Δ4. Έχουμε $F(\beta)+F(3\beta)>2F(2\beta)$, επειδή β > 0.

Θεωρώ την $g(x)=2F(x)-F(\beta)-F(3\beta)$ με $x\in[\beta,2\beta]$

- g συνεχής στο $[\beta,2\beta]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- $g(\beta)=2F(\beta)-F(\beta)-F(3\beta)=F(\beta)-F(3\beta)$
  $g(2\beta)=2F(2\beta)-F(\beta)-F(3\beta)<0$

Έχουμε $F'(x)=f(x)=\frac{1}{e^x}(\ln x-x)=\frac{h(x)}{e^x}<0$ για x > 0

άρα $F\downarrow$ στο $(0,+\infty)$

Συνεπώς για $\beta<3\beta\Rightarrow F(\beta)>F(3\beta)$ άρα $F(\beta)-F(3\beta)>0$ άρα $g(\beta)>0$

Συνεπώς $g(\beta)\cdot g(2\beta)<0$

άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\beta,2\beta)$ τέτοιο ώστε:

$g(\xi)=0\Leftrightarrow F(\beta)+F(3\beta)=2F(\xi)$

Έχουμε ότι: $g'(x)=2F'(x)<0$, άρα $g\downarrow$ στο $[\beta,2\beta]$, άρα ξ μοναδική ρίζα της $g(x)=0$,

άρα και της ισοδύναμης $F(\beta)+F(3\beta)=2f(x)$

Επιμέλεια: **Δούνιας Δημήτρης**
Μώρος Επαμεινώνδας
Μαργαρίτης Κώστας