ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ σύγχρονο www.synchrono.gr

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ. Π.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου Ο.Ε.Δ.Β σελ. 30

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου Ο.Ε.Δ.Β σελ. 13

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου Ο.Ε.Δ.Β σελ. 59

Α4. α) Σ
β) Λ
γ) Λ
δ) Λ
ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Από το ιστόγραμμα συχνοτήτων έχουμε: $\nu_1 = 12,\quad \nu_2 = 8,\quad \nu_3 = 14,\quad \nu_4 = 6$
Αν ν το πλήθος των πωλητών της εταιρείας, τότε $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 12 + 8 + 14 + 6 = 40$

Β2.

κλάσεις	x_i	ν_i	f_i
$[2,4)$	3	12	0,30
$[4,6)$	5	8	0,20
$[6,8)$	7	14	0,35
$[8,10)$	9	6	0,15
Σύνολο		40	1

$f_1 = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 0,30$, $f_3 = \frac{14}{40} = \frac{3,5}{10} = 0,35$

$f_2 = \frac{8}{40} = \frac{2}{10} = 0,20$, $f_4 = \frac{6}{40} = \frac{1,5}{10} = 0,15$

Β3. α. $\bar{x} = \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3 + \nu_4 x_4}{\nu} = \frac{3 \cdot 12 + 5 \cdot 8 + 7 \cdot 14 + 9 \cdot 6}{40} = \frac{36 + 40 + 98 + 54}{40} = \frac{228}{40} = 5,7$

β. Στην κλάση $[4,6)$ πλάτους 2 έχουμε 8 παρατηρήσεις.
Στο διάστημα $[4,5,\quad 6)$ πλάτους 1,5 έχουμε x παρατηρήσεις.
Τα παραπάνω ποσά είναι ανάλογα, άρα $\frac{2}{1,5} = \frac{8}{x} \Leftrightarrow 2x = 12 \Leftrightarrow x = 6$
Συνεπώς το πλήθος των πωλητών που έκαναν πωλήσεις τουλάχιστον 4,5 είναι:6+14+6=26

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Οι θέσεις των τοπικών ακρότατων της συνάρτησης $f(x) = 4x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x - 1$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης f΄(x)=0.

$f'(x) = 12x^2 - 7x + 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 7x + 1 = 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1 = 1$

$x = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{24} = \frac{7 \pm 1}{24} \Leftrightarrow x = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ ή $x = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

Παίρνουμε τον πίνακα μονοτονίας της f

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	
			Τ.Μ		Τ.Ε.		

Επειδή $x_1 < x_2$, έπεται ότι $x_1 = \frac{1}{4}$ και $x_2 = \frac{1}{3}$ είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f.

Άρα

$P(K) = x_1 = \frac{1}{4}$

$P(A) = x_2 = \frac{1}{3}$

Έχουμε P(K) + P(A) +P(Π) = 1 άρα

$P(\Pi) = 1 - P(K) - P(A) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

Γ2. Έχουμε ότι $\Gamma = K \cup A$ με K, A ασυμβίβαστα, άρα $P(\Gamma) = P(K \cup A) = P(K) + P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$.

Η πιθανότητα του ενδεχομένου η μπάλα να μην είναι ούτε κόκκινη ούτε άσπρη ισούται προφανώς με την πιθανότητα του ενδεχομένου η μπάλα να είναι πράσινη.

Δηλαδή $P(\Delta) = P(\Pi) = \frac{5}{12}$

Στο ενδεχόμενο Ε, εφόσον η μπάλα που επιλέγεται τυχαία είναι άσπρη ή δεν είναι πράσινη, θα είναι άσπρη ή κόκκινη.

Άρα $P(E) = P(\Gamma) = \frac{7}{12}$

Γ3. Αν N(A) το πλήθος των άσπρων, N(Π) το πλήθος των πράσινων και N(Ω) το συνολικό πλήθος, τότε έχουμε:

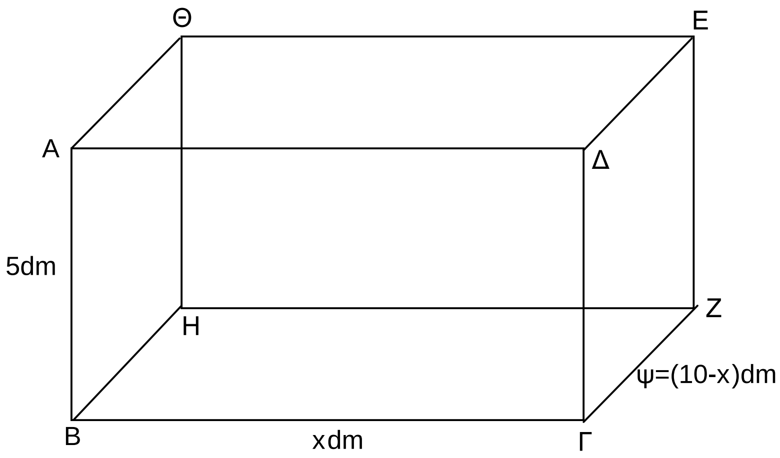
$$N(A) = N(\Pi) - 4 \Leftrightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{N(\Pi)}{N(\Omega)} - \frac{4}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(A) = P(\Pi) - \frac{4}{N(\Omega)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{5}{12} - \frac{4}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{4}{N(\Omega)} = \frac{5}{12} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{N(\Omega)} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow N(\Omega) = 48$$

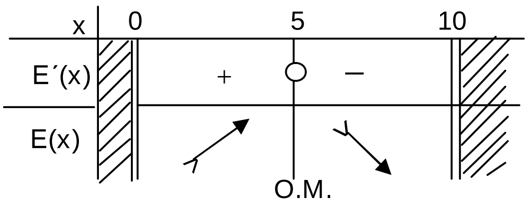
Άρα το δοχείο περιέχει 48 μπάλες.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Έστω ψ η άλλη πλευρά της βάσης.
Έχουμε $2x + 2y = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$



$$E(x) = (AB\Gamma\Delta) + (\Theta EZH) + (A\Theta HB) + (E\Delta\Gamma Z) + (BHZ\Gamma) =$$
$$= 5x + 5x + 5(10 - x) + 5(10 - x) + x(10 - x) =$$
$$= 10x + 50 - 5x + 50 - 5x + 10x - x^2 =$$
$$= -x^2 + 10x + 100 \text{ με } x \in (0,10)$$
$$E'(x) = \left(-x^2 + 10x + 100\right)' = -2x + 10$$
$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 10 = 0 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$$
$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 10 > 0 \Leftrightarrow 2x < 10 \Leftrightarrow x < 5$$
$$E'(x) < 0 \Leftrightarrow -2x + 10 < 0 \Leftrightarrow 2x > 10 \Leftrightarrow x > 5$$



Για x=5 η επιφάνεια γίνεται μέγιστη.

Δ2. α) Λύνουμε την εξίσωση $2S^2-5S+2=0$.

$\Delta=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2=25-16=9$

$S=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm 3}{4}$

άρα S=2 ή $S=\frac{1}{2}=0,5$

Έχουμε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές, άρα $CV>\frac{1}{10}\Leftrightarrow\frac{S}{\overline{x}}>\frac{1}{10}\Leftrightarrow\frac{S}{8}>\frac{1}{10}\Leftrightarrow 10S>8\Leftrightarrow S>0,8$

άρα $S=\frac{1}{2}$ απορρίπτεται.

Συνεπώς S=2.

β) Αν $\overline{y}$ η μέση τιμή των x_i^2, με i=1,2,…,15

Τότε $\overline{y}=\frac{\sum_{i=1}^{15}x_i^2}{15}$

Έχουμε ότι:

$$S^2=\frac{1}{15}\left\{\sum_{i=1}^{15}x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{15}x_i\right)^2}{15}\right\}\Leftrightarrow S^2=\frac{\sum_{i=1}^{15}x_i^2}{15}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{15}x_i\right)^2}{15^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S^2=\overline{y}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{15}x_i}{15}\right)^2\Leftrightarrow S^2=\overline{y}-\left(\overline{x}\right)^2\Leftrightarrow\overline{y}=S^2+\overline{x}^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overline{y}=2^2+8^2=4+64=68$$

Δ3. Έχουμε ότι $x_1<x_2<\ldots<x_{14}<x_{15}$ και επειδή η Ε είναι γνησίως φθίνουσα στο [5,10), έχουμε ότι:

$\mathrm{E}(x_1)>\mathrm{E}(x_2)>\ldots>\mathrm{E}(x_{14})>\mathrm{E}(x_{15})\Leftrightarrow$

$y_1>y_2>\ldots>y_{14}>y_{15}$

Έχουμε $y_1=\mathrm{E}(x_1)=\mathrm{E}(5)=-5^2+10\cdot 5+100=-25+50+100=150-25=125$

$y_{15}=\mathrm{E}(x_{15})=\mathrm{E}(9)=-9^2+10\cdot 9+100=-81+90+100=190-81=109$

Έχουμε $R=y_1-y_{15}=125-109=16$

Έχουμε

$y_i>-4x_i+9R+1\Leftrightarrow\mathrm{E}(x_i)>-4x_i+9\cdot 16+1\Leftrightarrow$

$-x_i^2+10x_i+100>-4x_i+145\Leftrightarrow 0>x_i^2-14x_i+45\Leftrightarrow$

$x_i^2-14x_i+45<0$

Λύνουμε την ανίσωση $x^2-14x+45<0$

$\Delta=(-14)^2-4\cdot 1\cdot 45=196-180=16$

$x=\frac{-(-14)\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{14\pm 4}{2}$ άρα x=9 ή x=5 άρα

x		5		9	
$x^2-14x+45$	+	0	−	0	+

άρα $5<x<9$ Συνεπώς $5<x_i<9$

άρα $x_i \in \{x_2, x_3, ..., x_{14}\}$

άρα $B=\{A_2(x_2,y_2),\quad A_3(x_3,y_3),....,\quad A_{14}(x_{14}, y_{14})\}$ και επειδή τα στοιχεία του B είναι ισοπίθανα σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε: $P(B)=\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}=\dfrac{13}{15}$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:

Δ. ΔΟΥΝΙΑΣ – Ε. ΜΩΡΟΣ – Κ. ΜΑΡΓΑΡΙΤΗΣ