

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ 20 5 2016
ΘΕΜΑ Α
A1. Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής σελ. 150-151

A2. Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής σελ. 87

A3. Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής σελ. 14

A4. $\alpha \rightarrow \Sigma$
 $\beta \rightarrow \Lambda$
 $\gamma \rightarrow \Sigma$
 $\delta \rightarrow \Sigma$
 $\varepsilon \rightarrow \Lambda$
ΘΕΜΑ Β
B1. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$

$$\text{Έχουμε: } f'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' - \left(\frac{5}{2}x^2\right)' + (6x)' - (1)' = \frac{1}{3}(x^3)' - \frac{5}{2}(x^2)' + 6(x)' =$$

$$= \frac{1}{3}3x^2 - \frac{5}{2}2x + 6 = x^2 - 5x + 6$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3$$

$$\left(\begin{array}{l} \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 > 0 \\ x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \end{array} \right)$$

Έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+
$f(x)$		↗	↘	↗	
		T.M	T.E.		

 Η $f \uparrow$ στα διαστήματα $(-\infty, 2]$ και $[3, +\infty)$ και η $f \downarrow$ στο διάστημα $[2, 3]$.

$$\text{Για } x=2 \text{ η } f \text{ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το } f(2) = \frac{2^3}{3} - \frac{5}{2} \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 1 = \frac{8}{3} - 10 + 12 - 1 = \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$$

Για $x=3$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το

$$f(3) = \frac{3^3}{3} - \frac{5}{2} \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 - 1 = 9 - \frac{45}{2} + 18 - 1 = \frac{18 - 45 + 36 - 2}{2} = \frac{7}{2}$$

B2. Έστω $y = \lambda x + \beta$ η ζητούμενη εξίσωση.

Έχουμε: $\lambda = f'(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6$

Επίσης ισχύει: $f(0) = \frac{0^3}{3} - \frac{5}{2} \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 - 1 = -1$. Συνεπώς $A(0, -1)$

Άρα η εξίσωση γράφεται: $y = 6x + \beta$

Επειδή το σημείο $A(0, -1)$ είναι σημείο της εφαπτομένης θα την επαληθεύει. Άρα $x=0$ και $y=-1$.

Έχουμε: $-1 = 6 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = -1$

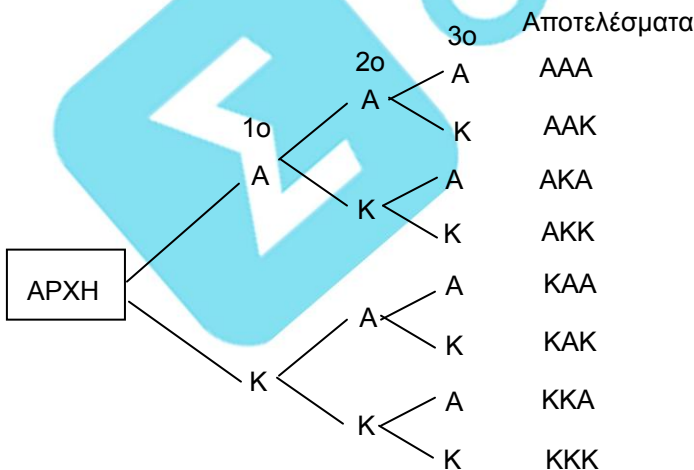
Συνεπώς: $y = 6x - 1$

B3. Έχουμε: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x) - 12}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x + 6 - 12}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 6)}{x + 1} =$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} (x - 6) = -7$

Για το τριώνυμο $x^2 - 5x - 6$ έχουμε:
 $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 49$
 $x_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{2} = \begin{cases} 6 \\ -1 \end{cases}$
Άρα $x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x - 6)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.



Άρα $\Omega = \{AAA, AAK, AKA, AKK, KAA, KAK, KKA, KKK\}$

Γ2. Έχουμε:

$$A = \{KAA, KAK, KKA, KKK\}$$

$$B = \{AKK, KAK, KKA, KKK\}$$

$$\Gamma = \{AAA, AAK, KKA, KKK\}$$

Γ3. α) Έχουμε:

$$\Delta = A \cap B = \{KAK, KKA, KKK\}$$

$$E = A \cup B = \{KAA, KAK, KKA, KKK, AKK\}$$

$$Z = \Gamma - E = \{AAA, AAK\}$$

Άρα έχουμε:

$$P(\Delta) = P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

$$P(E) = P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(Z) = P(\Gamma - E) = \frac{N(\Gamma - E)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

β) Έχουμε:

$$H = (A \cup B)' = \{AAA, AAK, AKA\}$$

$$\text{Επομένως } P(H) = P\left[(A \cup B)'\right] = \frac{N\left[(A \cup B)'\right]}{N(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

Έχουμε $\Theta = (A - B) \cup (B - A)$

$$\text{Ισχύει: } A - B = \{KAA\} \quad \text{και} \quad B - A = \{AKK\}$$

$$\text{Άρα } \Theta = \{AKK, KAA\}$$

$$\text{Συνεπώς } P(\Theta) = \frac{N(\Theta)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.	Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα v_i
	$[8, 8 + C)$		20
	$[8 + C, 8 + 2C)$	14	15
	$[8 + 2C, 8 + 3C)$		10
	$[8 + 3C, 8 + 4C)$		v_4
	Σύνολο		$v = \dots$

$$\text{Έχουμε } \frac{8 + C + 8 + 2C}{2} = 14 \Leftrightarrow 16 + 3C = 28 \Leftrightarrow 3C = 28 - 16 \Leftrightarrow 3C = 12 \Leftrightarrow C = \frac{12}{3} = 4$$

Δ2. Άρα ο πίνακας γίνεται:

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα v_i
[8,12)	10	20
[12,16)	14	15
[16,20)	18	10
[20,24)	22	v_4
Σύνολο		$v = \dots$

Έχουμε:

$$\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \frac{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4} = 14 \Leftrightarrow$$

$$\frac{10 \cdot 20 + 14 \cdot 15 + 18 \cdot 10 + 22v_4}{20 + 15 + 10 + v_4} = 14 \Leftrightarrow \frac{200 + 210 + 180 + 22v_4}{45 + v_4} = 14 \Leftrightarrow$$

$$590 + 22v_4 = 14(45 + v_4) \Leftrightarrow 590 + 22v_4 = 630 + 14v_4 \Leftrightarrow$$

$$22v_4 - 14v_4 = 630 - 590 \Leftrightarrow 8v_4 = 40 \Leftrightarrow v_4 = 5$$

$$\text{Άρα } v = 20 + 15 + 10 + 5 = 50$$

Δ3. Ο πίνακας γίνεται:

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα v_i
[8,12)	10	20
[12,16)	14	15
[16,20)	18	10
[20,24)	22	5
Σύνολο		$v = 50$

Στην κλάση [8,12) πλάτους 4 έχουμε 20 υπολογιστές.

Στο διάστημα [9,12) πλάτους 3 έχουμε x υπολογιστές.

Τα παραπάνω ποσά είναι ανάλογα.

$$\text{Άρα } \frac{4}{3} = \frac{20}{x} \Leftrightarrow 4x = 3 \cdot 20 \Leftrightarrow x = \frac{60}{4} \Leftrightarrow x = 15$$

Άρα χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά.

$15 + 15 + 10 + 5 = 45$ υπολογιστές για να τρέξουν το πρόγραμμα.

$$\begin{aligned} \Delta 4. S^2 &= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 v_1 + (x_2 - \bar{x})^2 v_2 + (x_3 - \bar{x})^2 v_3 + (x_4 - \bar{x})^2 v_4}{v} = \\ &= \frac{(10 - 14)^2 \cdot 20 + (14 - 14)^2 \cdot 15 + (18 - 14)^2 \cdot 10 + (22 - 14)^2 \cdot 5}{50} = \frac{16 \cdot 20 + 0 + 16 \cdot 10 + 64 \cdot 5}{50} = \\ &= \frac{320 + 160 + 320}{50} = \frac{800}{50} = \frac{1600}{100} = 16 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } S^2 = 16 \Leftrightarrow S = \sqrt{16} = 4$$

$$CV = \frac{S}{|\bar{x}|} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} = \frac{20}{70} > \frac{7}{70} = \frac{1}{10} = 10\% \text{ άρα } CV > 10\%$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Δ5. Αν ψ_i για $i = 1, \dots, 50$ οι νέοι χρόνοι, έχουμε: $\psi_i = \frac{80}{100} X_i \Leftrightarrow \psi_i = 0,8 X_i$ για $i = 1, \dots, 50$

Έχουμε:

$$\bar{\psi} = 0,8 \bar{x} = 0,8 \cdot 14$$

$$S_{\psi} = |0,8| S_x = 0,8 \cdot 4$$

$$CV_{\psi} = \frac{S_{\psi}}{|\bar{\psi}|} = \frac{0,8 \cdot 4}{0,8 \cdot 14} = \frac{2}{7} > \frac{1}{10}$$

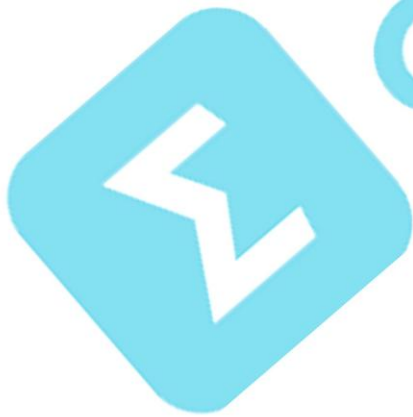
άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Επιμέλεια:

Δ. Δούνιας

Ε. Μώρος

Ρ. Νικολάου



ΣΥΓΧΡΟΝΟ