

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)**  
**ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)**  
**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής.

Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f, g$  λέγονται ίσες;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε το  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\alpha) - G(\beta)$ .

**β)** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

**γ)** Κάθε συνάρτηση  $f$ , για την οποία ισχύει  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , είναι σταθερή στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ .

**δ)** Μια συνάρτηση  $f$  είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της, η εξίσωση  $y = f(x)$  έχει ακριβώς μια λύση ως προς  $x$ .

- ε) Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[α,β]$ , τότε η  $f$  παίρνει στο  $[α,β]$  μια μέγιστη τιμή  $M$  και μια ελάχιστη τιμή  $m$ .

**Μονάδες 10**

### **ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- B1.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της  $f$ .

**Μονάδες 6**

- B2.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

**Μονάδες 9**

- B3.** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**Μονάδες 7**

- B4.** Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **B1**, **B2**, **B3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

**Μονάδες 3**

### **ΘΕΜΑ Γ**

- Γ1.** Να λύσετε την εξίσωση  $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 4**

- Γ2.** Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που ικανοποιούν την σχέση  $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 8**

- Γ3.** Αν  $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , να αποδειχθεί ότι η  $f$  είναι κυρτή.

**Μονάδες 4**

- Γ4.** Αν  $f$  είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Γ3**, να λυθεί η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x + 3) - f(x)$$

όταν  $x \in [0, +\infty)$ .

**Μονάδες 9**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση  $f$  ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \eta \mu x \, dx = \pi$
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu x} = 1$
- $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ1.** Να δείξετε ότι  $f(\pi) = \pi$  (μονάδες 4) και  $f'(0) = 1$  (μονάδες 3).

**Μονάδες 7**

**Δ2. α)** Να δείξετε ότι η  $f$  δεν παρουσιάζει ακρότατα στο  $\mathbb{R}$ . (μονάδες 4)

**β)** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ . (μονάδες 2)

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x}{f(x)}$ .

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να δείξετε ότι  $0 < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} \, dx < \pi^2$ .

**Μονάδες 6**

### ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**