ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 9-6-2017

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε σχολ. βιβλίο σε. 135

Α2. **α)** ψ

β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leq 0 \\ x\ , & x>0 \end{cases}$

Έχουμε f συνεχής στο $x_o=0$, γιατί:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x)=0$

$f(o)=0$

άρα $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x)=f(0)$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$

άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$.

Α3. Βλέπε σχολ. βιβλίο σελ. 35

Α4. **α)** Λ
β) Σ
γ) Λ
δ) Σ
ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αρχικά βρίσκουμε το Πεδίο ορισμού Α της $f \circ g$. Έχουμε:

$$f(x) = \ln x \quad \text{με} \quad A_f = (0, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{x}{1-x} \quad \text{με} \quad A_g = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

Πρέπει:

$$x \in A_g \quad \text{και} \quad g(x) \in A_f$$

$$x \neq 1 \quad \text{και} \quad g(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x(1-x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

άρα $A_{f \circ g} = (0,1)$. Έχουμε:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln g(x) = \ln \frac{x}{1-x}$$

άρα $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln \frac{x}{1-x}$ με $x \in (0,1)$

Β2. $h'(x) = \left(\ln \frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{\frac{x}{1-x}} \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{(x)'(1-x) - x(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{x(1-x)} > 0$

γιατί $x \in (0,1)$

άρα h γνησίως αύξουσα στο (0,1), άρα αντιστρέφεται.

Βρίσκουμε την αντίστροφη της h.

Το σύνολο τιμών της h επειδή είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο (0,1) είναι το :

$$h((0,1)) = \left(\lim_{x \to 0^+} h(x), \lim_{x \to 1^-} h(x) \right)$$

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} \ln \frac{x}{1-x}$$

Θέτουμε $u = \frac{x}{1-x}$, $\lim_{x \to 0^+} u = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1-x} = o$

άρα :

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{u \to 0} \ln u = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-} \ln \frac{x}{1-x}$$

Θέτουμε: $v = \frac{x}{1-x}, \lim_{x \to 1^-} v = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{1-x} = +\infty$

άρα $\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{v \to +\infty} \ln v = +\infty$

άρα $h((0,1)) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

άρα το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το $\mathbb{R}$.

Θέτουμε $y = h(x)$ και λύνουμε ως προς x

$$y = \ln\frac{x}{1-x} \Leftrightarrow e^y = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow (1-x)e^y = x \Leftrightarrow$$

$$e^y - xe^y = x \Leftrightarrow e^y = x\left(e^y+1\right) \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{e^y+1}$$

άρα $h^{-1}(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ με $x \in \mathbb{R}$

B3. Έχουμε $\varphi(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ με $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi'(x) = \left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)' = \frac{\left(e^x\right)'\left(e^x+1\right) - e^x\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2} = \frac{e^x\left(e^x+1\right) - e^x \cdot e^x}{\left(e^x+i\right)^2} = \frac{\left(e^x\right)^2 + e^x - \left(e^x\right)^2}{\left(e^x+1\right)^2} = \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2} > 0$$

άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δεν έχει ακρότατα στο $\mathbb{R}$ γιατί είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

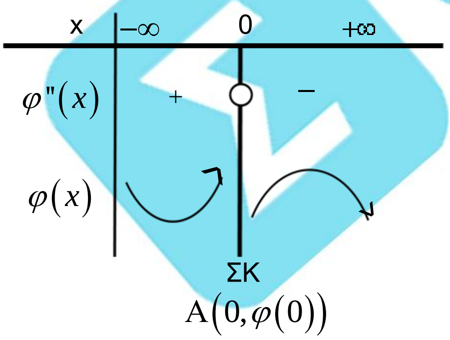
$$\varphi''(x) = \left(\varphi'(x)\right)' = \left(\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\right)' = \frac{\left(e^x\right)'\left(e^x+1\right)^2 - e^x\left(\left(e^x+1\right)^2\right)'}{\left(e^x+1\right)^4} = \frac{e^x\left(e^x+1\right)^2 - e^x 2\left(e^x+1\right)\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^4} =$$

$$= \frac{e^x\left(e^x+1\right)^2 - 2\left(e^x\right)^2\left(e^x+1\right)}{\left(e^x+1\right)^4} = \frac{e^x\left(e^x+1\right)\left(e^x+1-2e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^4} = \frac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3}$$

Αν $\varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Αν $\varphi''(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$

Αν $\varphi''(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - e^x < 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$



Στο $(-\infty, 0]$ η φ είναι κυρτή

Στο $[0, +\infty)$ η φ είναι κοίλη

$$\varphi(0) = \frac{e^0}{e^0+1} = \frac{1}{2}$$

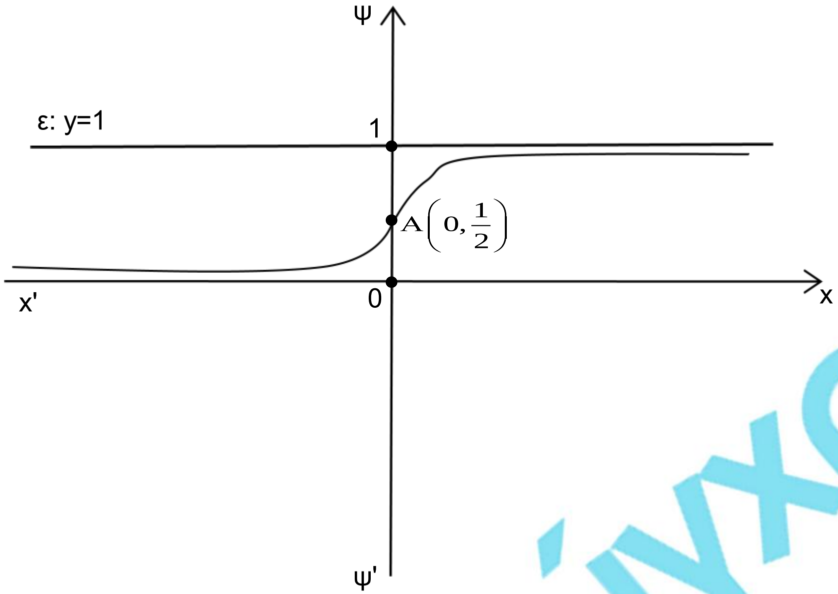
Στο $x_0 = 0$ η φ παρουσιάζει σημείο καμπής το $A(0, \varphi(0))$ άρα $A\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

Β4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{0}{0+1}=0$

άρα η ευθεία y = o (άξονας x'x) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}1=1$$

άρα η ευθεία ε: y = 1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο $+\infty$.



<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Έχουμε $f(x)=-\eta\mu x, x\in[0,\pi]$ και $\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right)$

Αν $\mathrm{M}(x_o, f(x_o))$ το σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει εξίσωση

$y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)$ και επειδή διέρχεται από το $\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right)$ οι συντεταγμένες του

την επαληθεύουν $-\dfrac{\pi}{2}-f(x_o)=f'(x_o)\left(\dfrac{\pi}{2}-x_o\right)\Leftrightarrow-\dfrac{\pi}{2}+\eta\mu x_o=-\sigma\upsilon\nu x_o\left(\dfrac{\pi}{2}-x_o\right)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\sigma\upsilon\nu x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\eta\mu x-\frac{\pi}{2}\qquad x\in[0,\pi]$$

$$g'(x)=-\eta\mu x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$g'(x)=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\eta\mu x$$

Έχουμε ημx > 0 για $x\in(0,\pi)$

Άρα $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$

$$g'(x)>0 \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{2}>0 \Leftrightarrow x>\frac{\pi}{2}$$

$$g'(x)<0 \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{2}<0 \Leftrightarrow x<\frac{\pi}{2}$$

x	0		π/2		π
g'(x)		–	0	+	
g(x)	0	↘	ΟΕ	↗	0

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\pi}{2}$

Έχουμε $g(0)=\sigma\upsilon\nu 0\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+\eta\mu 0-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+\eta\mu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=1-\frac{\pi}{2}$$

$$g(\pi)=(\sigma\upsilon\nu\pi)\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)+\eta\mu\pi-\frac{\pi}{2}=+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$$

Έχουμε ότι: Αν $0<x<\frac{\pi}{2} \xrightarrow{g\downarrow} g(0)>g(x)>g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ άρα $0>g(x)$

αν $\frac{\pi}{2}<x<\pi \xrightarrow{g\uparrow} g\left(\frac{\pi}{2}\right)<g(x)<g(\pi)$ άρα g(x)<0

Άρα η g δεν έχει ρίζα στο (0,π), άρα μοναδικές ρίζες οι $x_1=0$ και $x_2=\pi$.

Άρα έχει δύο ακριβώς εφαπτομένες στα σημεία 0 (ο,ο) και Β (π,ο)

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1: y-f(0)=f'(0)(x-o) \Leftrightarrow y=-x \\ \varepsilon_2: y-f(\pi)=f'(\pi)(x-\pi) \Leftrightarrow y=x-\pi \end{pmatrix}$$

Γ2. $f''(x)=(-\sigma\upsilon\nu x)'=\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$

άρα η f είναι κυρτή στο [0,π]

άρα οι εφαπτομένες της $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι κάτω από την C_f με εξαίρεση τα σημεία επαφής Ο (0,0) και Β (π,0)

Βρίσκουμε το σημείο τομής των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ λύνοντας το σύστημα των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$

$$\begin{cases} y=-x \\ y=x-\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x-\pi=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ 2x=\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x=\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=-\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{2} \end{matrix}$$ άρα τέμνονται στο $\Gamma\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$

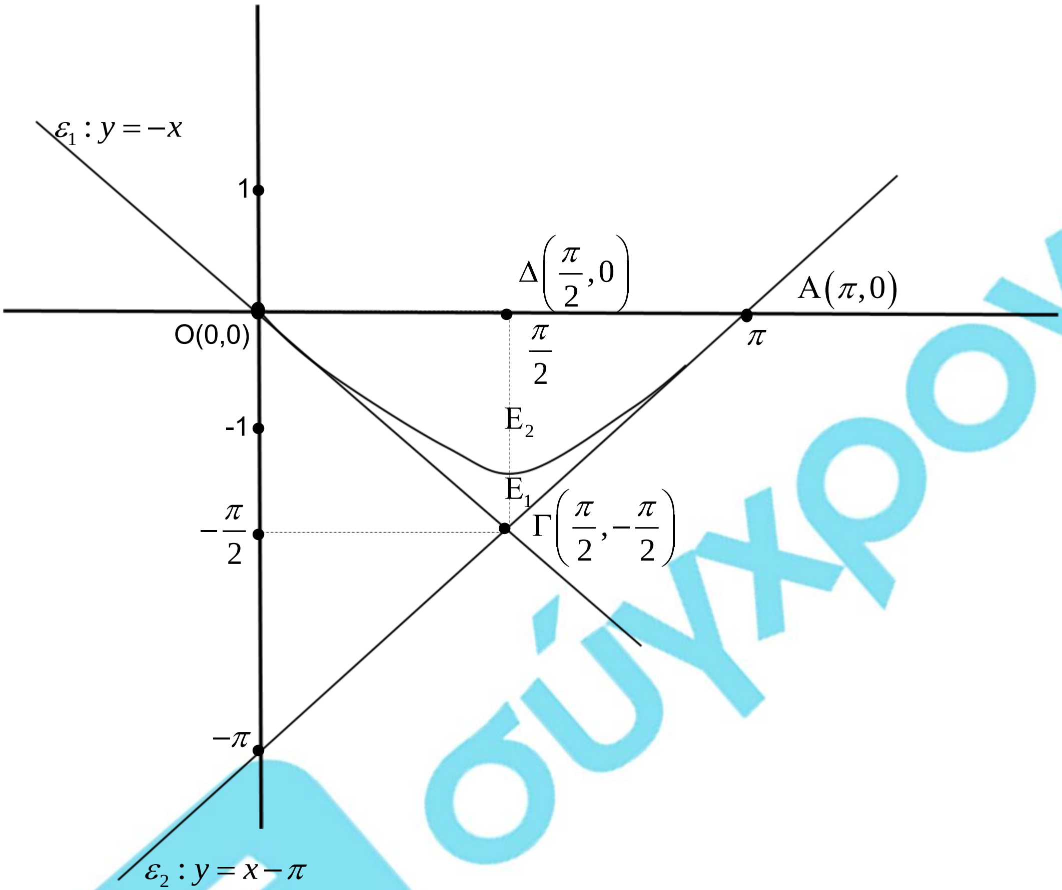
Έχουμε ότι $f(x)=-\eta\mu x\le 0$ για $x\in[0,\pi]$

άρα $E_2=-\int_0^{\pi}(-\eta\mu x)dx=\int_0^{\pi}\eta\mu x dx=[-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi}=-\sigma\upsilon\nu\pi+\sigma\upsilon\nu 0=1+1=2\tau\mu$

Έχουμε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΓ είναι $(\mathrm{OA\Gamma})=\frac{1}{2}(\mathrm{OA})(\Gamma\Delta)=\frac{1}{2}|\pi|\cdot\left|-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi^2}{4}$

Άρα $\mathrm{E}_1=(\mathrm{OA\Gamma})-\mathrm{E}_2=\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)\tau\mu$

Άρα $\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{E}_2}=\frac{\frac{\pi^2}{4}-2}{2}=\frac{\frac{\pi^2}{4}}{\frac{2}{1}}-\frac{2}{2}=\frac{\pi^2}{8}-1$



Γ3. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{-\eta\mu x+x}{-\eta\mu x-x+\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\left[(-\eta\mu x+x)\frac{1}{-\eta\mu x-x+\pi}\right]=(1)$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to\pi}(-\eta\mu x+x)=\pi$

$\lim\limits_{x\to\pi}(-\eta\mu x-x+\pi)=-\eta\mu\pi-\pi+\pi=0$

Επειδή η f είναι κυρτή στο [0,π] η εφαπτομένη της $\varepsilon_2: y=x-\pi$ είναι κάτω από τη C_f όταν $x\in[o,\pi)$.

Άρα $f(x)>x-\pi$ άρα $-\eta\mu x-x+\pi>0$

άρα $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1}{-\eta\mu x-x+\pi}=+\infty$

άρα $(1)=+\infty$.

Γ4. Έχουμε ότι επειδή η f κυρτή στο [0,π] η C_f είναι πάνω από την $\varepsilon_2: y=x-\pi$ άρα $f(x)\geq x-\pi$ (η ισότητα ισχύει μόνο για x=π).

Άρα $\frac{f(x)}{x} \geq 1-\frac{\pi}{x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}-1+\frac{\pi}{x} \geq 0$

Θεωρούμε την $h(x)=\frac{f(x)}{x}-1+\frac{\pi}{x}$ με $x \in [1,e] \subseteq [0,\pi]$

Έχουμε h συνεχής ως πράξεις συνεχών στο [1, e]
και h(x)>0 στο [1, e] άρα

$$\int_1^e h(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^e \left(\frac{f(x)}{x}-1+\frac{\pi}{x}\right)dx > 0$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx + \int_1^e \left(-1+\frac{\pi}{x}\right)dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > \int_1^e \left(+1-\frac{\pi}{x}\right)dx \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > [+x-\pi \ln x]_1^e \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > (e-\pi \ln e)-(1-\pi \ln 1) \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e-\pi-1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο [-1,0) ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
Η f είναι συνεχής στο (0,π] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
Ελέγχουμε την συνέχεια στο $x_o=0$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \sqrt[3]{x^4} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x \eta\mu x = e^0 \eta\mu 0 = 0$$

$$f(0) = e^0 \eta\mu 0 = 0$$

άρα $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

άρα η f είναι συνεχής και στο $x_0=0$
άρα η f είναι συνεχής στο [-1,π].

Αν $x \in (-1,0): f(x)=\sqrt[3]{x^4}=\sqrt[3]{(-x)^4}=(-x)^{\frac{4}{3}}$

$$f'(x)=\left((-x)^{\frac{4}{3}}\right)'=\frac{4}{3}(-x)^{\frac{4}{3}-1}(-x)'=-\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}=-\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}<0 \quad \text{στο} \quad (-1,0)$$

άρα δεν έχει κρίσιμο σημείο στο (-1,0). Αν:

$$x \in (0,\pi): f(x)=e^x \eta\mu x \Leftrightarrow f'(x)=(e^x \eta\mu x)'=(e^x)'\eta\mu x+e^x(\eta\mu x)'=e^x \eta\mu x+e^x \sigma\upsilon\nu x=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$$

$$f'(x)=0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x \quad (1)$$

(Έχουμε: $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$: γιατί αν $\sigma\upsilon\nu x=0$ τότε και ημx = 0 άτοπο γιατί $\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1$)

$(1) \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=-1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$. Έχουμε:

$$0<x<\pi \Leftrightarrow 0<\kappa\pi-\frac{\pi}{4}<\pi \Leftrightarrow$$

$$+\frac{\pi}{4}<\kappa\pi<\frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4}<\kappa<\frac{5}{4}$$

άρα κ =1, άρα $x=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

άρα $x_1=\frac{3\pi}{4}$ κρίσιμο σημείο της f.

Ελέγχουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x^4}-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}-\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{-x}=\lim_{x\to 0^-}-(-x)^{\frac{4}{3}-1}=\lim_{x\to 0^-}-(-x)^{\frac{1}{3}}=\lim_{x\to 0^-}\left(-\sqrt[3]{-x}\right)=-0=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(e^x\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}e^x\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{x}=1\cdot 1=1$$

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ το $x_0=0$ είναι κρίσιμο σημείο.

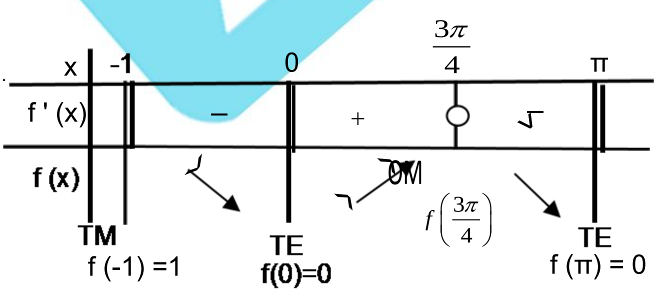
Δ2. Αν $x\in(-1,0)$ έχουμε $f'(x)<0$ άρα $f\downarrow$ στο $[-1,0]$.

Αν $x\in(0,\pi)$ τότε το $x=\frac{3\pi}{4}$ είναι μοναδική ρίζα της $f'(x)=0$, άρα η f επειδή, είναι συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο στα $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.

Έχουμε: $\frac{\pi}{2}\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ με $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left(\eta\mu\frac{\pi}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}>0$ άρα $f'(x)>0$ στο $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$.

Έχουμε $\frac{5\pi}{6}\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ με $f'\left(\frac{5\pi}{6}\right)=e^{\frac{5\pi}{6}}\left(\eta\mu\frac{5\pi}{6}+\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}\right)=e^{\frac{5\pi}{6}}\left(\eta\mu\frac{5}{6}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}\right)=e^{\frac{5\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)<0$

άρα $f'(x)<0$ στο $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.



Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3\pi}{4}, \quad \pi\right]$

Στο x=-1 η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1)=\sqrt[3]{(-1)^4}=1$

Στο x=0 η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(0)=0$

Στο $x=\frac{3\pi}{4}$ η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\eta\mu\frac{3\pi}{4}=e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\eta\mu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$

Στο x=π η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(\pi)=e^{\pi}\cdot\eta\mu\pi=0$

Επειδή f συνεχής στο $[-1,0]$ και γνησίως φθίνουσα, έχουμε: $A_1=f([-1,0])=[f(0),f(-1)]=[0,+1]$

Επειδή f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ έχουμε:

$$f\left(\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]\right)=\left[f(0),f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$$

Επειδή f συνεχής στο $\left[\frac{3\pi}{4}, \quad \pi\right]$ και γνησίως φθίνουσα έχουμε

$$A_3=f\left(\left[\frac{3\pi}{4}, \quad \pi\right]\right)=\left[f(\pi),f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right] \text{ άρα } f([-1, \quad \pi])=A_1\cup A_2\cup A_3=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$$

$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}>1\Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{4}}>\sqrt{2}\Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{2}}>2$ που ισχύει. Άρα ισχύει και η αρχική.

Δ3. Θεωρούμε την $\varphi(x)=f(x)-g(x)=e^{x}\eta\mu x-e^{5x}=e^{x}(\eta\mu-e^{4x})$ με $x\in[0,\pi]$

Έχουμε $0\le x\le\pi\Rightarrow 0\le 4x\le 4\pi\Leftrightarrow e^{0}\le e^{4x}\le e^{4\pi}$

$\Rightarrow e^{4x}\ge 1\Leftrightarrow -e^{4x}\le -1\Leftrightarrow \eta\mu x-e^{4x}\le\eta\mu x-1$

$\Rightarrow \eta\mu x-e^{4x}\le\eta\mu x-1\le 0\Leftrightarrow$

$e^{x}\left(\eta\mu x-e^{4x}\right)\le e^{x}\left(\eta\mu x-1\right)\le 0\Leftrightarrow\varphi(x)\le 0$

άρα $E=-\int_0^{\pi}\varphi(x)dx=\int_0^{\pi}\left(g(x)-f(x)\right)dx=$

$\int_0^{\pi}\left(e^{5x}-e^{x}\eta\mu x\right)dx=\int_0^{\pi}e^{5x}dx-\int_0^{\pi}e^{x}\eta\mu x dx$

θέτω $I_1=\int_0^{\pi}e^{5x}dx=\left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^{\pi}=\frac{e^{5\pi}-1}{5}$

$I_2=\int_0^{\pi}e^{5x}\eta\mu x dx=\int_0^{\pi}\left(e^{x}\right)'\eta\mu x dx=$

$=\left[e^{x}\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^{x}(\eta\mu x)'dx=$

$=e^{\pi}\eta\mu\pi-e^{0}\eta\mu 0-\int_0^{\pi}e^{x}\sigma\upsilon\nu x dx=$

$=-\int_0^{\pi}(e^{x})'\sigma\upsilon\nu x dx=-\left[e^{x}\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^{x}(\sigma\upsilon\nu)'dx=$

$-e^{\pi}\sigma\upsilon\nu\pi+e^{0}\sigma\upsilon\nu 0-I_2$ άρα $2I_2=e^{\pi}+1$ άρα

$I_2=\frac{e^{\pi}+1}{2}$

άρα $E=\frac{e^{5\pi}-1}{5}-\frac{e^{\pi}+1}{2}=\frac{2e^{5\pi}-7-5e^{\pi}}{10}$

Δ4. Έχουμε:

$$16f\left(x\right)-\left(4x-3\pi\right)^2=8\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\,(1)\Leftrightarrow$$

$$f(x)-\frac{\left(4x-3\pi\right)^2}{16}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}&f(x)=f\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2\\&\text{Ε}\chi o\upsilon\mu\varepsilon\qquad f(x)\le f\frac{(3\pi)}{4}\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

$$f\frac{(3\pi)}{4}+\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2\le f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2\le 0$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\frac{3\pi}{4}$

Προφανής ρίζα της (1)είναι $x=\frac{3\pi}{4}$

άρα μοναδική.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Δ. Δούνιας, Ε. Μώρος