ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ σύγχρονο

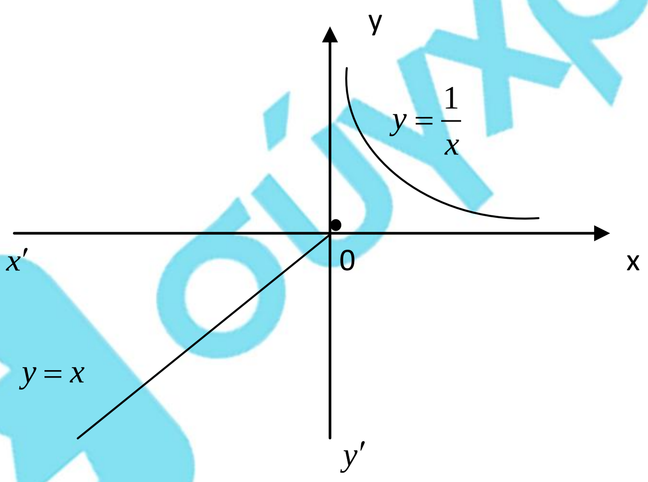
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 11 6 2018

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 99

Α2. α. $\to \Psi$

β. Έστω η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x, x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, x>0 \end{cases}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Έχουμε ότι η g για $x\le 0$ και για $x>0$ είναι 1-1. Όμως:

• Για $x\le 0$ έχουμε $x_1<x_2\le 0$

$g(x_1)<g(x_2)$

Δηλ η $g \uparrow$ στο $(-\infty,0]$

•Για χ >0 έχουμε $0<x_1<x_2$

$\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}$

$g(x_1)>g(x_2)$ δηλ $g \downarrow$ στο $(0,+\infty)$

Συνεπώς η g όχι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 216

Α4. α) $\to$ Λ

β) $\to$ Λ

γ) $\to$ Σ

δ) $\to$ Σ

ε) $\to$ Σ

ΘΕΜΑ Β

Έχουμε $f(x)=x-\dfrac{4}{x^2}, x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Β1.

$$f'(x)=\left(x-\frac{4}{x^2}\right)'=\left(x-4x^{-2}\right)'=1-4\cdot(-2)\cdot x^{-3}=$$

$$=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3}=\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^3}$$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	‖	$+$
x^3	$-$		$-$	‖	$+$
x^2-2x+4	$+$		$+$	‖	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	TM $f(-2)=-3$	$\searrow$	‖	$\nearrow$

Στο $(-\infty,-2]$ η f είναι γν. αύξουσα
Στο $[-2,0)$ η f είναι γν. φθίνουσα
Στο $(0,+\infty)$ η f είναι γν. αύξουσα

Στο $x=-2$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-2)=-2-\dfrac{4}{(-2)^2}=-2-1=-3$

Β2.

Έχουμε $f'(x)=1+\dfrac{8}{x^3}=1+8\cdot x^{-3}$ με $x\neq 0$

Άρα $f''(x)=\left(1+8x^{-3}\right)'=0+8(-3)x^{-4}=\dfrac{-24}{x^4}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0)$ και κοίλη στο $(0,+\infty)$.

Β3.

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\dfrac{4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)=1\in\mathbb{R}$$

  $$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0\in\mathbb{R}$$

  άρα η ευθεία y = x είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- $$\lim_{x\to-\infty^{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\dfrac{4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)=1\in\mathbb{R}$$

  $$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0\in\mathbb{R}$$

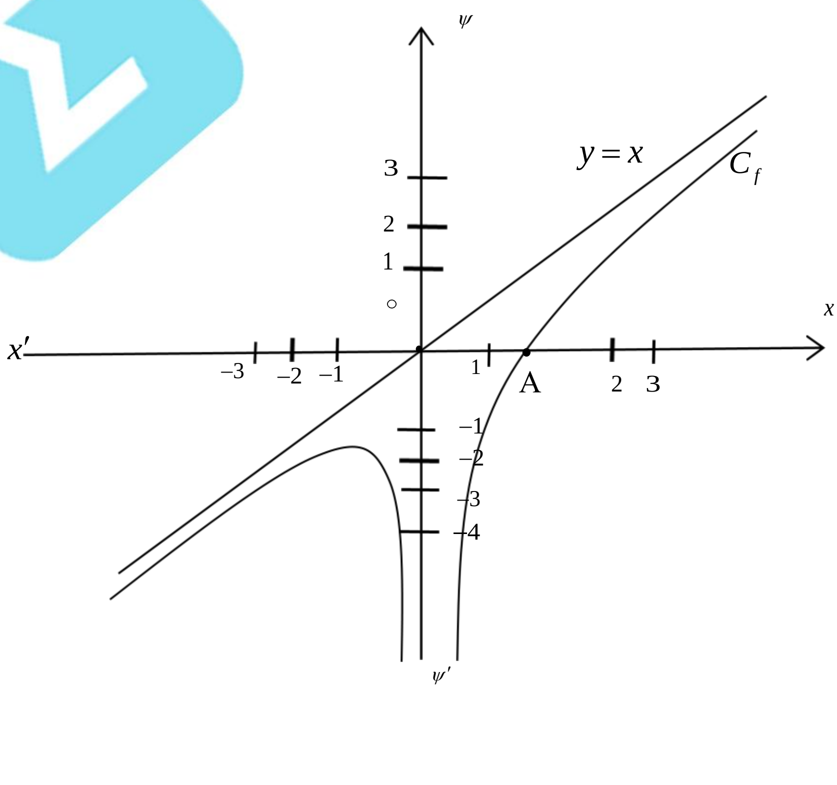
  άρα η ευθεία y = x είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

- $$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$$

  $$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$$

  άρα η χ = 0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Β4.



$$f(x)=x-\frac{4}{x^2}=\frac{x^3-4}{x^2}$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-4=0 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{4}$$

Άρα τέμνει τον $x'x$ στο $A\left(\sqrt[3]{4},0\right)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η πλευρά του τετραγώνου είναι $\alpha=\frac{x}{4}$, αφού η περίμετρός του είναι x άρα

$$\text{Ε}\tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon=\left(\frac{x}{4}\right)^2=\frac{x^2}{16}$$

Η περιφέρεια του κύκλου είναι $8-x$.

Αν ρ η ακτίνα του κύκλου, τότε $2\pi\rho=8-x \leftrightarrow$ άρα $\rho=\frac{8-x}{2\pi}$

Το εμβαδόν του κύκλου είναι άρα $\text{Ε}\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon=\pi\rho^2=\pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2=\frac{64-16x+x^2}{4\pi}$

$$\text{Ε}(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{x^2-16x+64}{4\pi}=\frac{\pi x^2}{16\pi}+\frac{4x^2-64x+256}{16\pi}=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi},\ x\in(0,8)$$

Γ2. Παραγωγίζουμε την E και έχουμε:

$$\text{Ε}'(x)=\left(\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}\right)'=\frac{1}{16\pi}\left[(\pi+4)(x^2)'-64(x)'+(256)'\right]=$$

$$\frac{1}{16\pi}\cdot\left[2(\pi+4)x-64\right]=\frac{(\pi+4)x-32}{8\pi}$$

$$\text{Ε}'(x)=0\leftrightarrow(\pi+4)x-32=0\Leftrightarrow x=\frac{32}{\pi+4}$$

$$\text{Ε}'(x)>0\leftrightarrow(\pi+4)x-32>0\Leftrightarrow x>\frac{32}{\pi+4}$$

$$\text{Ε}'(x)<0\leftrightarrow(\pi+4)x-32<0\Leftrightarrow x<\frac{32}{\pi+4}$$

x	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8
$E'(x)$		$-$	0	$+$	
$E(x)$		↘	$o.\varepsilon$ $E\left(\frac{32}{\pi+4}\right)$	↗	

Το Ε ελαχιστοποιείται όταν το $x=\dfrac{32}{\pi+4}$ άρα η πλευρά α του τετραγώνου είναι: $\alpha=\dfrac{\chi}{4}=\dfrac{8}{\pi+4}$ και η διάμετρος δ του κύκλου είναι: $\delta=2\rho=\dfrac{8-\dfrac{32}{\pi-4}}{2\pi}=\dfrac{\dfrac{8\pi+32-32}{\pi+4}}{\dfrac{\pi}{1}}=\dfrac{\dfrac{8\pi}{\pi+4}}{\dfrac{\pi}{1}}=\dfrac{8\pi}{8(|\pi+4)}=\dfrac{\pi}{\pi+4}$, άρα α=δ.

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $\mathrm{E}(\chi)=5$ έχει μοναδική ρίζα στο (0,8) .θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=E(x)$ με $\chi\varepsilon[0,8]$. Έχουμε f συνεχής στο $[0,8]$ ως πολυωνομική f παραγωγίσιμη στο (0,8) πολυωνομική με $f'(x)=E'(x)$.

Έχουμε

x	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	ΤΜ $f(0)$	↘	$o.\varepsilon$	↗	

$$f(0)=\frac{256}{16\pi}=\frac{16}{\pi}$$

$$f\left(\frac{32}{\pi+4}\right)=\frac{(\pi+4)\dfrac{32^2}{(\pi+4)^2}-64\cdot\dfrac{32}{\pi+4}++256}{16\pi}=$$

$$\frac{\dfrac{1024}{\pi+4}-\dfrac{2048}{\pi+4}++256}{16\pi}=\frac{256-\dfrac{1024}{\pi+4}}{16\pi}=\frac{256(\pi+4)-1024}{16\pi(\pi+4)}=\frac{16}{\pi+4}$$

$$f(8)=\frac{(\pi+4)8^2-648++256}{16\pi}=\frac{(\pi+4)64-512+256}{16\pi}=\frac{64\pi+2\cancel{5}6-5\cancel{1}2+2\cancel{5}6}{16\pi}=\frac{64\pi}{16\pi}=4$$

Επειδή f συνεχής και στο $\left[0,\frac{32}{\pi+4}\right]$ έχουμε $f\left(\left[0,\frac{32}{\pi+4}\right]\right)=\left[f\left(\frac{32}{\pi+4}\right),(0)\right]=\left[\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right]$

Έχουμε f συνεχής στο $\left[0,\frac{32}{\pi+4}\right]$

$\frac{16}{\pi+4}<5<\frac{16}{\pi}$ άρα $f\left(\frac{32}{\pi+4}\right)<5<f(0)$

Άρα υπάρχει $x_0\in\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right)$ ώστε $f(x_0)=5\Rightarrow \mathrm{E}(x_0)=5$ μοναδικό γιατί $\mathrm{E}\searrow$ στο $\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right)$

Επειδή f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{32}{\pi+4},8\right]$ έχουμε

$$f\left(\left[\frac{32}{\pi+4},8\right]\right)=\left[f\left(\frac{32}{\pi+4}\right),f(8)\right]=\left[\frac{16}{\pi+4},4\right]$$

Το $5\notin f\left(\left[\frac{32}{\pi+4},8\right]\right)$ άρα η $f(x)=5$ δεν έχει ρίζα στο $\left[\frac{32}{\pi+4},8\right]$, άρα και η $\mathrm{E}(x)=5$

δεν έχει ρίζα στο $\left(\frac{32}{\pi+4},8\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Έχουμε $f(x)=2\cdot e^{x-a}-x^2, x\in\mathbb{R}$ με $\alpha>1$

$$f'(x)=\left(2e^{x-a}-x^2\right)'=2e^{x-a}(x-a)'-\left(x^2\right)'\Rightarrow$$

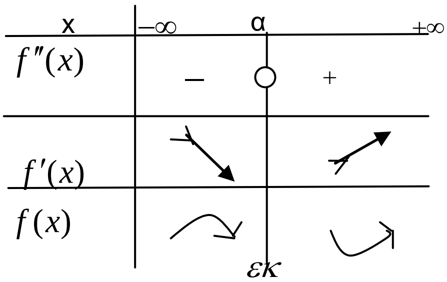
$$f'(x)=2e^{x-a}-2x$$

$$f''(x)=2e^{x-a}(x-a)'-2(x)'=2e^{x-a}-2$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 2e^{x-a}-2=0\Leftrightarrow e^{x-a}=1\Leftrightarrow x-a=0\Leftrightarrow x=a$$

$$f''(x)>0\Leftrightarrow 2e^{x-a}-2>0\Leftrightarrow e^{x-a}>1\Leftrightarrow x>a$$

$$f''(x)<0\Leftrightarrow 2e^{x-a}-2<0\Leftrightarrow e^{x-a<1}\Leftrightarrow x<a$$



Δ2. Επειδή f΄ συνεχής και $\downarrow$ στο $(-\infty,\alpha]$. Έχουμε

$A_1 = f'((-\infty]) = \left[f'(\alpha), \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) \right) = [2(1-\alpha),+\infty)$ γιατί

$f'(\alpha) = 2e^{a-a} - 2a = 2(1-a) < 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2e^{x-a} - 2x) = +\infty$

Επειδή f΄ συνεχής και $\nearrow$ στο $[\alpha,+\infty)$

Έχουμε $A_2 = f'([\alpha,+\infty)) = \left[f'(\alpha), \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) \right) = [2(1-\alpha),+\infty)$ γιατί

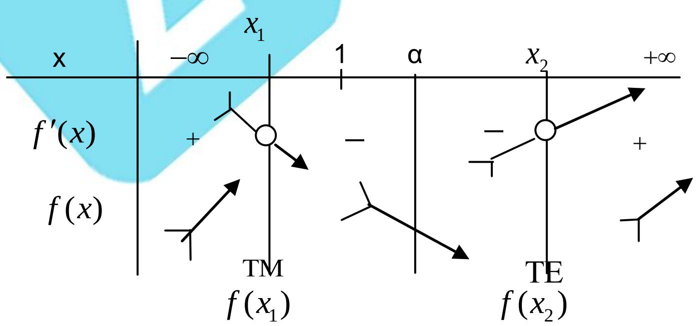
$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2e^{x-a} - 2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{x-a}\left(1 - \dfrac{x}{e^{x-a}}\right)$

Υπολογίζω το $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{x-a}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^{x-\alpha}} = 0$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$

Έχουμε $0 \in A_1$ $\mu\varepsilon$ $0 \neq 2(1-\alpha)$ άρα υπάρχει $x_1 \in (-\infty,\alpha)$, ώστε $f'(x_1) = 0$ μοναδικό γιατί $f' \downarrow$ στο $(-\infty,\alpha]$

Έχουμε $0 \in A_2$ $\mu\varepsilon$ $0 \neq 2(1-\alpha)$ άρα υπάρχει $x_2 \in (\alpha,+\infty)$, ώστε $f'(x_2) = 0$ μοναδικό γιατί $f' \uparrow$ στο $[\alpha,+\infty)$

Έχουμε



άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2

Δ3. Έχουμε $f \searrow$ και συνεχής στο $[\alpha, x_2]$ άρα $f([a, x_2]) = [f(x_2), f(\alpha)]$

Αρκεί να δείξουμε ότι $f(1) > f(a) \Leftrightarrow 2e^{1-a} - 1 > 2 - a^2 \Leftrightarrow 2e^{1-a} - 3 + \alpha^2 > 0$ για κάθε α > 1

Θεωρούμε την $g(x) = 2e^{1-x} - 3 + x^2$ με $x \in [1, +\infty)$

$g'(x) = -2e^{1-x} + 2x$

$g''(x) = 2e^{1-x} + 2 > 0 \quad \forall x \in (1, +\infty)$, άρα $g' \nearrow$ στο $[1, +\infty)$ αν $1 < x \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g'(1) < g'(x) \Leftrightarrow 0 < g'(x)$ άρα $g \uparrow \quad \sigma\tau o \quad [1, +\infty)$

Έχουμε $1 < \alpha \Rightarrow g(1) < g(\alpha) \Leftrightarrow 2e^{1-a} - 3 + a^2 > 0 \Leftrightarrow 2e^{1-a} - 1 > 2 - a^2 \Leftrightarrow f(1) > f(a)$

άρα $f(1) \notin f((a, x_2)) = (f(x_2), f(x))$ άρα η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη.

Δ4. Για α=2:

Άρα Ε.Κ A(2, -2)

$f(x) = 2e^{x-2} - x^2, f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$

$f(2) = 2 \cdot e^{2-2} - 2^2 = 2 - 4 = -2$

$f'(2) = 2e^{2-2} - 2 \cdot 2 = 2 - 4 = -2$

Η εφαπτόμενη της C_f στο A(2, -2) έχει εξίσωση $y - (-2) = -2(x-2) \Leftrightarrow y = -2x + 2$.

Επειδή f κυρτή στο [2,3] έχουμε:

$f(x) \geq -2x + 2 \Leftrightarrow$

$f(x) \cdot \sqrt{x-2} \geq -2(x-1)\sqrt{x-2} \Leftrightarrow$

$f(x)\sqrt{x-2} \geq -2(x-1)\sqrt{x-2}$ άρα

$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx \geq -2\int_2^3 (x-1)\sqrt{x-2}dx$

Υπολογίζουμε το $\mathrm{I} = \int_2^3 (x-1)\sqrt{x-2}dx$

Θέτουμε:

$u = \sqrt{x-2} \Leftrightarrow u^2 = x - 2 \Leftrightarrow u^2 + 2 = x \Leftrightarrow$

$2udu = dx$

$\alpha\nu \quad x = 2 \Leftrightarrow u = 0$

$\alpha\nu \ x = 3 \Leftrightarrow u = 1$

$\mathrm{I} = \int_\alpha^1 (u^2 + 2 - 1)u2udx = 2\int_0^1 (u^2 + 1)u^2dx = 2\int_0^1 (u^4 + u^2)dx =$

$= 2\left[\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = 2\frac{8}{15} = \frac{16}{15}$

άρα $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx \geq -2\frac{16}{15} = -\frac{32}{15}$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ
Δ. Δούνιας, Ε. Μώρος