ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 17 6 2020

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 76

Α2. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 104

Α3. α) Ψ

β) Η συνάρτηση f(x)=x^3 είναι ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αλλά $f'(x)=3x^2\geq 0$ (Η ισότητα ισχύει για x=0)

Α4. α) Λ

β) Σ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αρχικά βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της fog.

Πρέπει:

$(x\in Ag$ και $g(x)\in Af)$, άρα $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)\in(1,+\infty)$

$g(x)\in(1,+\infty)$ σημαίνει ότι $g(x)>1\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow x>0$

άρα $A_{fog=}(0,+\infty)$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{g(x)+2}{g(x)-1}=\frac{e^x+2}{e^x-1}$$

Β2. Θέτουμε $\varphi(x)=(fog)(x)$

$$\varphi'(x)=\left(\frac{e^x+2}{e^x-1}\right)'=\frac{e^x(e^x-1)-e^x(e^x+2)}{(e^x-1)^2}=\frac{(e^x)^2-e^x-(e^x)^2-2e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{-3e^x}{\left(e^x-1\right)^2}<0 \quad \text{για } x>0$$

άρα $\varphi\downarrow$ στο $(0,+\infty)$, άρα "1−1" άρα αντιστρέφεται.

Επειδή $\varphi\downarrow$ και συνεχής στο $(0,+\infty)$, ισχύει ότι $\varphi((0,+\infty))=(\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x),\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x))$

- $\lim\limits_{x\to o^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to o^+}\frac{e^x+2}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to o^+}(e^x+2)\frac{1}{e^x-1}$

  $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x+2)=3>0$

  $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x-1)=0$ και $e^x-1>0$ γιατί $x>0$ άρα

  $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{e^x-1}=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+2}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{e^x}}{1-\dfrac{1}{e^x}}=\dfrac{1+0}{1-0}=1$

  άρα $\varphi((0,+\infty))=(1,+\infty)$, άρα $A\varphi^{-1}=(1,+\infty)$
  Βρίσκουμε τον τύπο της αντίστροφης.
  Θέτουμε $y=\varphi(x)$ και λύνουμε ως προς x

$$y=\frac{e^x+2}{e^x-1}\Leftrightarrow(e^x-1)y=e^x+2\Leftrightarrow ye^x-y=e^x+2\Leftrightarrow ye^x-e^x=y+2\Leftrightarrow(y-1)e^x=y+2\overset{y>1}{\Leftrightarrow}$$

$$e^x=\frac{y+2}{y-1}\Leftrightarrow\ln e^x=\ln\frac{y+2}{y-1}\Leftrightarrow x=\ln\frac{y+2}{y-1}$$

άρα $\varphi^{-1}(x)=\ln\dfrac{x+2}{x-1}$ με $x\in(1,+\infty)$

Β3. $\varphi'(x)=\left[\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)\right]'\overset{x>1}{=}(\ln(x+2)-\ln(x-1))'=\dfrac{1}{x+2}(x+2)'-\dfrac{1}{x-1}(x-1)'=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-1}=$

$$=\frac{(x-1)-(x+2)}{(x+2)(x-1)}=\frac{-3}{(x+2)(x-1)}<0 \quad \text{για} \quad x>1$$

άρα $\varphi\downarrow$ στο $(1,+\infty)$

Β4.

- $\lim\limits_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(\ln(x+2)-\ln(x-1))=$

  Υπολογίζουμε τα όρια : $\lim\limits_{x\to1^+}\ln(x+2)=\ln3$

  $\lim\limits_{x\to1^+}\ln(x-1)$

  Θέτουμε $u=x-1$, $\lim\limits_{x\to1^+}u=\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0$

  άρα $\lim\limits_{x\to1^+}\ln(x-1)=\lim\limits_{u\to o}\ln u=-\infty$

  άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x+2}{x-1}$

Θέτουμε $\omega=\dfrac{x+2}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\omega=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{\omega\to1}\ln\omega=0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή f συνεχής στο x=0 ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (\eta\mu x + \lambda\sigma\upsilon\nu x) = 0 + \lambda\cdot 1 = \lambda$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{1-x} - \ln\lambda\right) = +1 - \ln\lambda$

άρα $\lambda = 1 - \ln\lambda \Leftrightarrow \ln\lambda + \lambda - 1 = 0 \quad (1)$

Θέτουμε: $\varphi(x) = \ln x + x - 1$ με x>0

Προφανής ρίζα της φ το x=1

$\varphi'(x) = \dfrac{1}{x} + 1 > 0$ για κάθε x>0 άρα $\varphi \uparrow \sigma\tau o\,(0,+\infty)$ άρα x=1 μοναδική ρίζα της φ(x) = 0 άρα η

$(1) \Leftrightarrow \varphi(\lambda) = \varphi(1) \Leftrightarrow \lambda = 1$

Γ2. Έχουμε $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & , \quad x \le 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

Υπολογίζουμε τα: $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-(1-x)}{x(1-x)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{x(1-x)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1-x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\eta\mu x}{x} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}\right) = 1 + 0 = 1$

άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \in \mathbb{R}$

άρα f παραγωγίσιμη στο x=0 με $f'(0) = 1$

Άρα ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο A(0,1) και έχει εξίσωση

$\varepsilon : y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = 1\cdot x \Leftrightarrow \varepsilon : y = x + 1$

Αν ω η γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον x΄x, ισχύει ότι:

$\varepsilon\varphi\omega = f'(0) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \omega = \dfrac{\pi}{4}$, γιατί $0 \le \omega < \pi$

Γ3. Έχουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη **σε όλο** το πεδίο ορισμού της με

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x)^2} & , \quad x<0\\ 1 & , \quad x=0\\ \sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x & , \quad 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα σημεία στα οποία $f'(x)=0$

Αν x<0: $f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}>0$, άρα δεν έχει κρίσιμα σημεία στο $(-\infty,0)$

Αν $0<x<\dfrac{3\pi}{2}$: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x \quad (1)$

(έχουμε $\sigma\upsilon\nu x\neq 0$, γιατί αν $\sigma\upsilon\nu x=0$, τότε και $\eta\mu x=0$, άτοπο γιατί $\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1$)

άρα η $(1)\Leftrightarrow \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4}, \kappa\in\mathbb{Z}$

Έχουμε

$$0<x<\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0<\kappa\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0<\kappa+\frac{1}{4}<\frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}<\kappa<\frac{6}{4}-\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}<\kappa<\frac{5}{4} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \kappa=0 \quad ή \quad \kappa=1$$

Αν κ=0 τότε

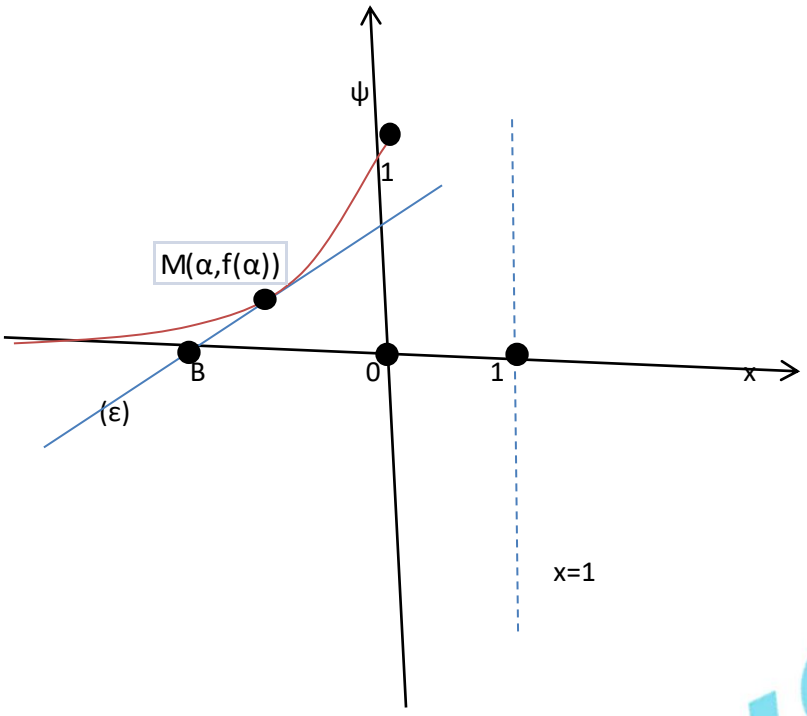
$$x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow f(x)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{4}+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=2\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

Αν κ=1 τότε

$$x=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4} \Rightarrow f(x)=f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\eta\mu\left(\frac{5\pi}{4}+\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{4}\right)=\eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\eta\mu\frac{\pi}{4}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=-2\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα $A\left(\dfrac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$ και $B\left(\dfrac{5\pi}{4},-\sqrt{2}\right)$

Γ4. Η γραφική παράσταση της C_f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Να βρεθεί το $x_B(t_o)=$; όταν $\alpha(t_o)=1$ $\kappa\alpha\iota$ $\alpha'(t)=-\dfrac{\alpha(t)}{3}$

Έχουμε $M(\alpha, f(\alpha))$.

Η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει εξίσωση

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow y-\frac{1}{1-\alpha}=\frac{1}{(1-\alpha)^2}(x-\alpha)\Leftrightarrow y=\frac{1}{(1-\alpha)^2}x+\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{(1-\alpha)^2}x+\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^2}-\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\Leftrightarrow y=\frac{1}{(1-\alpha)^2}x+\frac{1-2\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

Για y=0: $0=\dfrac{1}{(1-\alpha)^2}x+\dfrac{1-2\alpha}{(1-\alpha)^2}\Leftrightarrow x=2\alpha-1$ άρα

$$x_B(t)=2\alpha(t)-1\Rightarrow x_B'(t)=2\alpha'(t)\overset{t=t_o}{\Rightarrow}x_B'(t_o)=2\alpha'(t_o)=2\left(-\frac{\alpha(t_o)}{3}\right)=-\frac{2}{3}(-1)=\frac{2}{3}\frac{\mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma\ \mu\acute{\eta}\kappa o\upsilon\varsigma}{\mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma\ \chi\rho\acute{o}\nu o\upsilon}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$f(x)=e^x+x^2-ex-1 \quad , \quad x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=e^x+2x-e \quad , \quad x\in\mathbb{R}$

$f''(x)=e^x+2>0 \quad , \quad x\in$ στο $\mathbb{R}$

Επειδή f' συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)>0\,\forall x\in\mathbb{R}$ έχουμε $f'\uparrow$ στο $\mathbb{R}$

Έχουμε:

- f' συνεχής στο $[0,1]$
- $f'(0)=e_o+2\cdot 0-e=1-e<0$

  $f'(1)=e+2-e=2>0$

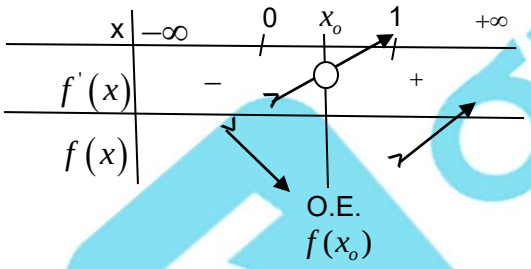
  άρα $f'(0)\cdot f'(1)<0$

άρα σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(0,1)$, τέτοιο ώστε $f'(x_o)=0$, μοναδικό γιατί $f'\uparrow$ στο $\mathbb{R}$

Αν $x<x_o \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x_o)\Leftrightarrow f'(x)<0$

Αν $x>x_o \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(x_o)\Leftrightarrow f'(x)>0$

Άρα



Στο x_o η f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο το $f(x_o)=e^{x_o}+x_o^2-ex_o-1 \quad (1)$

Έχουμε $f'(x_o)=e^{x_o}+2x_o-e=0\Leftrightarrow e^{x_o}=e-2x_o$

Άρα η $(1)\Leftrightarrow f(x_o)=e-2x_o+x_o^2-ex_o-1\Leftrightarrow f(x_o)=x_o^2-(e+2)x_o+e-1$

Δ2. $\lim\limits_{x\to x_o}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(x_o)}+\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_o}\right)\right]=\lim\limits_{x\to x_o}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(x_o)}\left(1+\left(f(x)-f(x_o)\right)\eta\mu\dfrac{1}{x-x_o}\right)\right]=*$

Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(x)-f(x_o)}=(2)$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)-f(x_o)\right)=f(x_o)-f(x_o)=0$ και $f(x)>f(x_o)$ κοντά στο x_o άρα $f(x)-f(x_o)>0$,

άρα $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(x)-f(x_o)}=+\infty$

Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to x_o}\left[\left(f(x)-f(x_o)\right)\eta\mu\dfrac{1}{x-x_o}\right]$

Έχουμε

$$\left|\eta\mu\frac{1}{x-x_o}\right|\le 1\Leftrightarrow\left|f(x)-f(x_o)\right|\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{x-x_o}\right|\le\left|f(x)-f(x_o)\right|\Leftrightarrow\left|\left(f(x)-f(x_o)\right)\cdot\eta\mu\frac{1}{x-x_o}\right|\le\left|f(x)-f(x_o)\right|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\left|f(x)-f(x_o)\right|\le\left(f(x)-f(x_o)\right)\eta\mu\frac{1}{x-x_o}\le\left|f(x)-f(x_o)\right|$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to x_o}\left|f(x)-f(x_o)\right|=0$

$\lim\limits_{x\to x_o}\left(-\left|f(x)-f(x_o)\right|\right)=0$

άρα από Κ.Π. $\lim\limits_{x\to x_o}\left(\left(f(x)-f(x_o)\right)\eta\mu\dfrac{1}{x-x_o}\right)=0$

άρα $*=+\infty$

Δ3. Θέτουμε $g(x)=f(x)+x-x_o$ με $x\in[x_o,1]$

Έχουμε:

• g συνεχής στο $[x_o,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$g(1)=f(1)+1-x_o=e+1-e-1+1-x_o=1-x_o>0$

$g(x_o)=f(x_o)+x_o-x_o=f(x_o)<0$

(γιατί $x_o<1\underset{[x_o,+\infty]}{\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}}f(x_o)<f(1)\Leftrightarrow f(x_o)<0$)

άρα $g(1)\cdot g(x_o)<0$ άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα ρ$\in(x_o,1)$, τέτοιο ώστε $g(\rho)=0$

Έχουμε $g'(x)=f'(x)+1$

Έχουμε $f'(x)>0$ στο $(x_o,1)$ άρα

$f'(x)+1>0$ στο $(x_o,1)\Leftrightarrow g'(x)>0$ στο $(x_o,1)$

και g συνεχής στο $[x_o,1]$, άρα $g\uparrow$ στο $[x_o,1]$,

άρα ρ μοναδική ρίζα της $g(x)=0$, άρα και της ισοδύναμης της $f(x)+x=x_o$.

Δ4. Έχουμε

$g(x)=f(x)+x-x_o, x\in[x_o,1]$

$g'(x)=f'(x)+1, x\in(x_o,1)$

$g'(x)=f''(x)>0, x\in(x_o,1)$

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$f(x_o) > f(\rho)\cdot(f'(\kappa)+1) \leftrightarrow f(x_o) > (x_o-\rho)\cdot(f'(\kappa)+1)$$

$$\overset{g(x_o)=f(x_o)}{\Leftrightarrow} g(x_o) > (x_o-\rho)\cdot g'(\kappa) \overset{x_o<\rho}{\leftrightarrow} \frac{g(x_o)}{x_o-\rho} < g'(\kappa) \overset{g(\rho)=0}{\leftrightarrow} \frac{g(x_o)-g(\rho)}{x_o-\rho} < g'(\kappa) \quad (2)$$

Αρκεί να δείξουμε τη (2)

Έχουμε:

- g συνεχής στο $[x_{o,}\rho]$
- g παραγωγίσιμη στο $(x_{o,}\rho)$

άρα από ΘΜ.Τ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_{o,}\rho)$

τέτοιο ώστε: $g'(\xi) = \dfrac{g(x_o)-g(\rho)}{x_o-\rho}$

Έχουμε : $(g'(x))' = f''(x) > 0$ στο $(x_{o,}+\infty)$, άρα

$g' \uparrow (x_{o,}1)$

Έχουμε $x_o < \xi < \rho < \kappa < 1$ άρα

$\xi < \kappa \xrightarrow{g'\uparrow} g'(\xi) < g'(\kappa) \Leftrightarrow \dfrac{g(x_o)-g(\rho)}{x_o-\rho} < g'(\kappa)$ που είναι η (2).

ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ

Τα θέματα ήταν σχετικά δύσκολα. Απαιτούσαν λεπτομέρεια στη διατύπωση και ο χρόνος ήταν σχεδόν οριακός για να διατυπωθούν.

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Δ. ΔΟΥΝΙΑΣ
Ε. ΜΩΡΟΣ
Λ. ΚΑΤΣΑΠΑΣ
Γ. ΑΛΛΑΓΙΑΝΝΗΣ